

# ANALYSE THERMODYNAMIQUE DU PROCESSUS QUI A LIEU DANS LE TUBE DE RANQUE – HILSCH

Michel FEIDT\*\*, Traian POPESCU\*, Gheorghe POPESCU\*, Monica COSTEA\*

\*UNIVERSITE POLYTECHNIQUE de Bucarest, popescu8m@yahoo.com

\*\*LEMTA – UNIVERSITE « Henri Poincaré » Nancy 1, France

*Rezumat. Lucrarea prezintă o analiză termodinamică a procesului ireversibil de separare energetică ce are loc în tubul Ranque – Hilsch. Ireversibilitățile interne considerate sunt determinate de generarea de entropie a procesului intern de frecare gazodinamică. Ireversibilitățile externe sunt determinate de transferul de căldură la diferență finită de temperatură dintre cele două fracțiuni de debit ce traversează tubul, rece, respectiv, caldă, și fluidele secundare din schimbătoarele de căldură care produc simultan efectele utile de răcire și de încălzire. Pentru a studia comportamentul tubului Ranque – Hilsch neadiabat, se consideră pierderile termice dintre gazul aflat în curgere periferică la interiorul tubului și agentul de răcire din exterior. Rezultatele obținute prin rezolvarea numerică a ecuațiilor modelului, în cazul producerii de frig, pun în evidență existența regimurilor funcționale de putere frigorifică maximă, caracterizate de valori optime ale fracțiunii debitului rece și de o generare importantă de entropie, ceea ce este în bună concordanță cu datele experimentale.*

## 1. INTRODUCTION

L'effet de séparation énergétique d'un flux tourbillonnaire de gaz en deux flux, un froid et un chaud, a été découvert par l'ingénieur en sidérurgie Georges J. Ranque à l'occasion de l'essai d'un dispositif cyclonique pour la séparation de poussière de charbon de l'air. En décembre 1931 il a obtenu un brevet d'invention pour le dispositif nommé «Tube Vortex» et en 1933 il a présenté une communication dans laquelle il mentionna que, à la base d'un tel dispositif (Fig. 1), l'air comprimé à 7 bars et 20 °C peut être séparé en un flux froid de (-10÷-20) °C et un flux chaud de presque 100 °C. En ce temps là, la Société Française de Physique a contesté le phénomène [1-3].

En 1946 le physicien allemand Rudolf Hilsch a continué les recherches dans ce domaine; à partir d'un flux d'air de quelques bars (1÷6 bars) et pour une fraction du flux d'air froid d'environ 30% il a obtenu une température de presque 200 °C, pour le flux chaud, et une température de presque -50 °C, pour le flux froid [2].

Les résultats du travail de R. Hilsch ont attiré l'intérêt du chimiste américain R. M. Milton (1950), qui n'a pas été d'accord avec les interprétations de Ranque et de Hilsch; d'après lui la distribution radiale de la température du gaz qui traverse le tube était déterminée par les pertes d'énergie cinétique par frottement.

Pour l'analyse du tube Ranque - Hilsch (TRH), en 1982 M. Kurosaka et al [4, 5], ont proposé un mécanisme tout à fait différent basé sur l'effet thermoacoustique ("vortex whistle") qui a lieu dans le tube vortex, mécanisme éprouvé par l'expérience [3, 4].

Le schéma du tube TRH est présenté en Fig. 1.

Le débit de gaz comprimé ( $\dot{m}$ ), caractérisé par une pression ( $p_H > p_0$ ) plus grande que celle atmosphérique ( $p_0$ ) et une température moyenne ( $T_H = T_0$ )

atmosphérique ( $T_0$ ), alimente une tuyère convergente (section minimale  $A_H$ ), dans laquelle le gaz est accéléré jusqu'à la célérité du son.

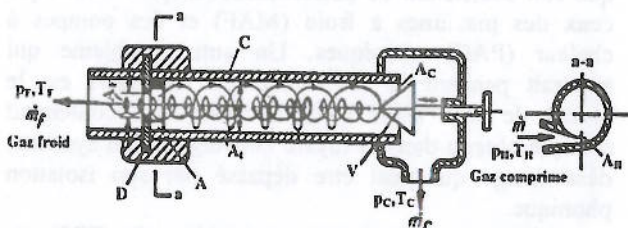


Fig. 1. Schéma du tube Ranque – Hilsch

( $V$  – vanne, de section  $A_C$ ;  $D$  – diaphragme, de section  $A_F$ ;  $C$  – corps de tube, de section  $A$ ;  $a-a$  – tuyère tangentielle, de section minimale  $A_H$ ;  $\dot{m}_C$  – le débit gaz chaud ( $T_C > T_H$ ,  $p_C$ );  $\dot{m}_F$  – le débit gaz froid ( $T_F < T_H$ ,  $p_F$ ).

Cet débit de gaz, entrant tangentiellement dans le tube cylindrique ( $C$ ) de section d'écoulement  $A$ , sous la force centrifuge, il se déplace à l'intérieur du tube  $C$ . Dans une section transversale ( $a-a$ ) du tube  $C$  on a:

- la zone périphérique de débit de gaz  $\dot{m}_C$ , qui se dirige vers la vanne ( $V$ , de section d'écoulement  $A_C$ ), caractérisée par une température  $T_C > T_H$  et une pression  $p_C \approx p_0$ ; c'est le débit gaz chaud;
- la zone centrale de débit de gaz  $\dot{m}_F$ , en écoulement contre-courant avec  $\dot{m}_C$ , traversant le diaphragme ( $D$ , de section d'écoulement  $A_F$ ), caractérisée par une température  $T_F < T_H$  et pression  $p_F \approx p_0$ ; c'est le débit gaz froid.

En actionnant la vanne de contrôle  $V$ , on peut régler la section  $A_C$  et, implicitement, le rapport entre

les deux débits massiques de gaz ( $\dot{m}_F/\dot{m}_C$ ). La variation de la proportion des débits est accompagnée par une modification importante des températures des deux flux. Dans le processus de formation des deux débits de gaz en écoulement contre-courant (flux périphérique chaud et flux central froid) on obtient une redistribution de l'énergie initiale. Cette redistribution d'énergie est le résultat des processus gazodynamiques très complexes, dont le mécanisme n'est pas encore parfaitement clarifié.

A partir de ses avantages (absence de pièces mécanique en mouvement, de phénomènes électriques et chimiques, gabarit et poids petits, sans problèmes d'entretien inexistants et donc durabilité accrue, production instantanée et en cogénération de gaz froid et chaud à températures réglables), en utilisant surtout des gaz résiduels pressurisés comme dans le transport en commun où on a un système pneumatique pour les freines, dans les gisements d'exploitation de gaz naturels, dans l'aéronautique etc., le TRH a des nombreuses applications dans le domaine de la production des gaz froids et/ou chauds ainsi que pour le conditionnement d'air.

Le TRH présente comme inconvénient principal une dissipation énergétique très importante, ce qui fait que son coefficient de performance est plus faible que ceux des machines à froid (MAF) et des pompes à chaleur (PAC) classiques. Un autre problème qui apparaît pendant le fonctionnement du TRH est le niveau de bruit assez élevé à cause de l'écoulement sonique obtenu dans la tuyère convergente du système, désavantage qui peut être dépassé par son isolation phonique.

Malgré la simplicité constructive du TRH, la modélisation physico-mathématique du phénomène gazothermodynamique de séparation énergétique d'un flux de gaz comprimé à température ambiante en deux courants de gaz, l'un froid et l'autre chaud, est complexe et pas encore parfaitement élucidée, c'est pourquoi la recherche scientifique dans ce domaine est très active.

## 2. MODÉLISATION DU SYSTÈME AVEC TRH

Si on considère l'ensemble du système gazothermodynamique avec le TRH, fonctionnant avec l'air atmosphérique, il est formé d'un compresseur, du Tube Ranque - Hilsch et des appareils d'échange de chaleur - l'échangeur froid (MAF) et respectivement l'échangeur chaud (PAC), comme il est présenté en Fig. 2.

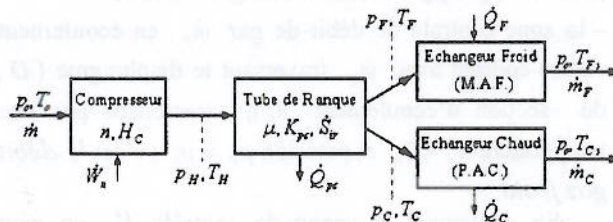


Fig. 2. Système gazothermodynamique avec le Tube Ranque - Hilsch.

Le compresseur, usuellement alternatif à piston, aspire le débit d'air  $\dot{m}$  aux conditions atmosphériques ( $p_0, T_0$ ) et le refoule dans un réservoir tampon où l'air est à la pression  $p_H$  et à la température  $T_H$ . Le fonctionnement du compresseur, qui conduit à la consommation de la puissance mécanique  $\dot{W}_a$ , est caractérisé par l'exposant polytropique du processus de compression  $n \in (1+k)$  (avec les extrêmes :  $n=1$ , pour la compression isothermique et  $n=k$ , pour la compression isentropique) et le rapport de compression  $H_C = p_H/p_0$ .

Le fonctionnement du TRH est caractérisé par la séparation du débit de gaz  $\dot{m}$  en deux : un froid, de température  $T_F$ , et un autre chaud, de température  $T_C$ . La fraction du débit froid  $\mu = \dot{m}_F/\dot{m}$  est ajustable par la vanne  $V$ . On considère le cas de tube non adiabatique où apparaissent les pertes thermiques  $\dot{Q}_{pc}$ , déterminées par le processus de refroidissement extérieur, caractérisé par la conductance thermique du côté chaud  $K_{pc}$ , et par l'écart de température entre le flux de gaz périphérique, à la température  $T_C$ , et le fluide extérieur de refroidissement à la température  $T_0$ . Pendant le passage du flux de gaz à travers le TRH, dans le cas des processus irréversibles, il apparaît une génération d'entropie  $\dot{S}_ir$ . On suppose que les deux débits de gaz, à la sortie du TRH sont à la même pression  $p_b \geq p_0$ , qui assure l'écoulement des flux de gaz à travers les échangeurs de chaleur qui suivent (Machine à Froid - MAF et Pompe à Chaleur - PAC).

Dans les appareils d'échange de chaleur, les deux débits assurent les effets thermiques utiles :

- la puissance frigorifique,  $\dot{Q}_F$ , du côté MAF, créée par le débit froid  $\dot{m}_F$  ;
- la puissance thermique,  $\dot{Q}_C$ , du côté PAC, créée par le débit chaud  $\dot{m}_C$ .

On suppose qu'à la sortie des échangeurs, les deux flux de gaz ont une pression égale à la pression atmosphérique  $p_0$  et respectivement les températures  $T_{Fs} \leq T_0$  du côté froid et  $T_{Cs} \geq T_0$  du côté chaud.

En fonction des paramètres considérés, les flux de chaleurs considérés s'expriment avec :

$$\dot{Q}_F = \dot{m}_F c_p (T_0 - T_F) \quad (\text{W}) \quad (1)$$

$$\dot{Q}_C = \dot{m}_C c_p (T_C - T_0) \quad (\text{W}) \quad (2)$$

$$\dot{Q}_{pc} = K_{pc} (T_C - T_0) \quad (\text{W}) \quad (3)$$

où  $c_p = kR/(k-1)$ , est la chaleur spécifique massique du gaz parfait considéré, qui s'exprime en fonction de la constante du gaz ( $R$ ) et de l'exposant adiabatique ( $k$ ).

Le modèle d'analyse réalisé est basé sur les équations de bilan suivantes :

- le bilan massique du débit de gaz qui permette l'expression du débit chaud ( $\dot{m}$ ) en fonction de la fraction du débit froid ( $\mu$ ) :

$$\dot{m} = \dot{m}_F + \dot{m}_C \text{ (kg/s)} ; \Rightarrow \dot{m}_C = (1-\mu)\dot{m} \quad (4)$$

- le bilan d'enthalpie du tube dans l'hypothèse du tube non adiabatique :

$$\dot{H}_H = \dot{H}_F + \dot{H}_C + \dot{Q}_{pc} \text{ (W)} \quad (5)$$

Comme  $\dot{H} = \dot{m}c_p T$ , tenant compte des relations (1-4), la relation (5) devient :

$$\dot{m}c_p T_0 = \mu \dot{m}c_p T_F + (1-\mu)\dot{m}c_p T_C + K_{pc}(T_C - T_0) \quad (6)$$

- le bilan d'entropie du tube non adiabatique, où à coté des variations d'entropies des deux composants (froid  $\Delta \dot{S}_F$  et chaud  $\Delta \dot{S}_C$ ), et de la génération d'entropie à la cause des pertes thermiques ( $\dot{S}_{Qpc}$ ), on tient compte aussi de la source d'irréversibilité interne représentée par la génération d'entropie ( $\dot{S}_{ir}$ ) :

$$\Delta \dot{S}_C + \Delta \dot{S}_F + \dot{S}_{Qpc} = \dot{S}_{ir} \text{ (J/K)} \quad (7)$$

Les variations d'entropies des deux composants s'expriment avec :

$$\Delta \dot{S}_C = \dot{m}_C (s_{cs} - s_{ce}) = (1-\mu)\dot{m} \left[ c_p \ln \frac{T_C}{T_0} + R \ln H_C \right] \quad (8)$$

$$\Delta \dot{S}_F = \dot{m}_F (s_{fs} - s_{fe}) = \mu \dot{m} \left[ c_p \ln \frac{T_F}{T_0} + R \ln H_C \right]$$

Par ailleurs, l'expression de la génération d'entropie due aux pertes thermiques est :

$$\dot{S}_{Qpc} = \frac{\dot{Q}_{pc}}{T_C} = K_{pc} \frac{T_C - T_0}{T_C} \quad (9)$$

Si on considère l'utilisation du TRH pour la production du froid, le coefficient de performance du système gazothermodynamique considéré (Fig. 2), s'exprime comme le rapport entre l'effet utile, à savoir la puissance frigorifique  $\dot{Q}_F$ , et l'effet consommé que constitue la puissance mécanique  $|\dot{W}_n|$  du compresseur considéré :

$$COP_F = \frac{\dot{Q}_F}{|\dot{W}_n|} \text{ (-)} \quad (10)$$

expression dans laquelle la puissance mécanique  $|\dot{W}_n|$  s'exprime avec :

$$|\dot{W}_n| = \frac{n}{n-1} \dot{m} R T_0 \left( H_C^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) \text{ (W)} \quad (11)$$

En combinant les relations (1), (4) et (11), la relation (10) devient :

$$COP_F = \frac{k}{n} \frac{n-1}{k-1} \mu \frac{T_0 - T_F}{T_0} \left( H_C^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right)^{-1} \quad (12)$$

Sur la base de ces trois équations (4 ÷ 6) de bilan du modèle, comme un exemple d'application pour la production du froid, on va faire une étude de sensibilité des performances et d'optimisation du paramètre principal de réglage  $\mu$  du fonctionnement du TRH en vue d'établissement des régimes fonctionnels de puissance frigorifique maximale et, respectivement, de coefficient de performance frigorifique maximum.

### 3. OPTIMISATION DU SYSTÈME AVEC TRH

En vue d'une étude de sensibilité et d'optimisation des paramètres du système gazothermodynamique considéré (Fig. 2), il faut exprimer la fraction du débit froid  $\mu$  et les performances du TRH ( $\dot{Q}_F$  et  $COP_F$ ) en fonction de variables  $T_F$  et  $T_C$ , qui sont liés par l'équation (7), du bilan entropique.

Ainsi, de l'équation (6) de bilan d'enthalpie, en divisant par le produit ( $\dot{m} c_p$ ), on tire le paramètre de réglage  $\mu$  :

$$\mu = (1 + \bar{k}_{pc}) \frac{T_C - T_0}{T_C - T_F} \in (0 \div 1) \text{ (-)} \quad (13)$$

où  $\bar{k}_{pc} = K_{pc} / (\dot{m} \cdot c_p)$ , est la conductance thermique adimensionnelle du flux  $\dot{Q}_{pc}$  perdu par le processus de refroidissement.

Par l'intermédiaire de la relation (13), en substituant la fraction du débit froid ( $\mu$ ) dans les relations (1) et (12), on obtient  $\dot{Q}_F$  et  $COP_F$  comme fonctions des variables du modèle.

Pour obtenir la relation entre les variables du modèle, il faut utiliser l'équation (7), dans laquelle on va substituer ses termes en utilisant les relations (8) et (9). Après calculs, en divisant par ( $\dot{m} c_p$ ), pour la génération d'entropie adimensionnelle on obtient :

$$\bar{S}_{ir} = \frac{\dot{S}_{ir}}{\dot{m} c_p} = (1-\mu) \ln \frac{T_C}{T_0} + \mu \ln \frac{T_F}{T_0} + \bar{k}_{pc} \frac{T_C - T_0}{T_C} + \frac{k-1}{k} \ln H_C ; \text{ (-)} \quad (14)$$

De la relation (14), non linéaire en  $T_F$  et  $T_C$ , il en résulte que l'étude de sensibilité et d'optimisation pour la détermination de  $\dot{Q}_F$  et du  $COP_F$  est une question de résolution numérique avec un degré de liberté en  $T_F$  ou  $T_C$ .

### 4. RESULTATS ET CONCLUSIONS

Le travail présente une analyse thermodynamique du processus irréversible de séparation énergétique qui a lieu dans le tube de Ranque - Hilsch (TRH). Les irréversibilités internes considérées sont déterminées par la génération d'entropie du processus de frottement gazodynamique interne  $\dot{S}_{ir}$ . Les irréversibilités externes sont déterminées par le transfert de chaleur à différence finie de température entre les deux fractions de débit de

gaz, froid et chaude, qui traversent le tube, et les fluides secondaires dans les appareils d'échange de chaleur qui produisent simultanément des effets utiles de refroidissement et de réchauffement. Pour étudier le comportement du TRH non adiabatique, on considère aussi les pertes thermiques  $\dot{Q}_{pc}$  entre le gaz en écoulement périphérique interne et l'agent extérieur de refroidissement.

Le modèle ci proposé, pour la production du froid, permet d'obtenir l'équation transcendante de la puissance frigorifique  $\dot{Q}_F$  et du coefficient de performance frigorifique  $COP_F$  du TRH en fonction du paramètre principal de réglage, la fractionne du débit froid  $\mu$  et de variables du modèle, les températures  $T_F$  et  $T_C$ .

Les résultats et les conclusions de l'étude théorique d'optimisation du fonctionnement du TRH, obtenus avec un programme de calcul basé sur le modèle physico-mathématique présenté précédemment, correspondent aux données suivantes: le gaz est parfait, avec les propriétés de l'air (constante du gaz  $R = 287,12 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$  ; exposant adiabatique  $k = 1,403$  ; exposant polytropique  $n = 1,24$ ), le débit massique de gaz  $\dot{m} = 0,995 \text{ kg/min}$ , paramètres de l'air environnemental  $t_0 = 23^\circ\text{C}$  et  $p_0 = 1 \text{ bar}$  [3].

La résolution numérique des équations du modèle proposé a permis l'étude de sensibilité des performances du TRH en fonction des paramètres d'analyse :  $H_C$ ,  $\bar{S}_{ir}$  et  $\bar{k}_p$ , et aussi l'optimisation de  $\mu$  en vue de la maximisation de  $\dot{Q}_F$  du  $COP_F$ .

Ainsi, Fig. 3 et Fig. 4 présentent les variations de  $\dot{Q}_F$  et du  $COP_F$  en fonction de  $\mu$  pour diverses valeurs du rapport de compression ( $H_C$ ) ; pour cette étude on considère une valeur importante pour  $\bar{S}_{ir} = 0,5$  et une valeur faible de  $\bar{k}_p = 0,1$ .

Il résulte que pour chaque  $H_C = ct.$  on obtient un régime de puissance frigorifique maximale  $\dot{Q}_F^{max}$ , et respectivement, un coefficient de performance frigorifique maximum  $COP_F^{max}$ , correspondants à une valeur optimale de la fraction du débit froid  $\mu_{opt}$ . On obtient de valeurs usuelles en pratique pour  $t_F \in (-82 \div -4)^\circ\text{C}$  et  $t_C \in (40 \div 100)^\circ\text{C}$ , pour  $H_C < 7$ . On remarque que  $\dot{Q}_F^{max}$  et  $COP_F^{max}$  augmentent fortement (respectivement 3,5 fois pour  $\dot{Q}_F^{max}$  et 3,1 fois pour  $COP_F^{max}$ ), alors que  $\mu_{opt}$  présente une augmentation faible (15%), quand  $H_C$  augmente de 5,8 jusqu'à 7.

Fig. 5. et Fig. 6 présentent la variation de  $\dot{Q}_F$  et du  $COP_F$  en fonction de  $\mu$ , pour diverses valeurs de génération d'entropie non dimensionnelle  $\bar{S}_{ir}$  ; dans cette étude on considère une valeur importante pour  $H_C = 6$  et une valeur faible de  $\bar{k}_p = 0,1$ .

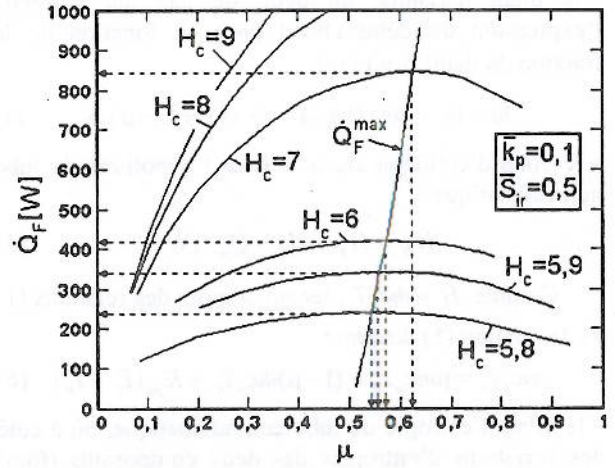


Fig. 3. Variation de  $\dot{Q}_F$  en fonction de  $\mu$  pour diverses valeurs de  $H_C$  et pour  $\bar{k}_p = 0,1$ ,  $\bar{S}_{ir} = 0,5$ .

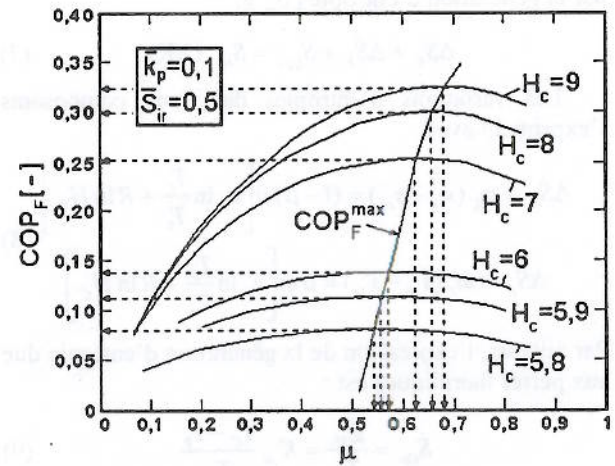


Fig. 4. Variation de  $COP_F$  en fonction de  $\mu$  pour diverses valeurs de  $H_C$  et pour  $\bar{k}_p = 0,1$ ,  $\bar{S}_{ir} = 0,5$ .

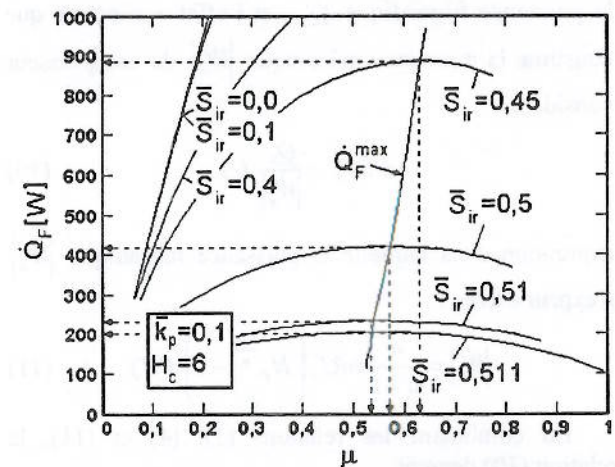


Fig. 5. Variation de  $\dot{Q}_F$  en fonction de  $\mu$  pour diverses valeurs de  $\bar{S}_{ir}$  et pour  $\bar{k}_p = 0,1$ ,  $H_C = 6$ .

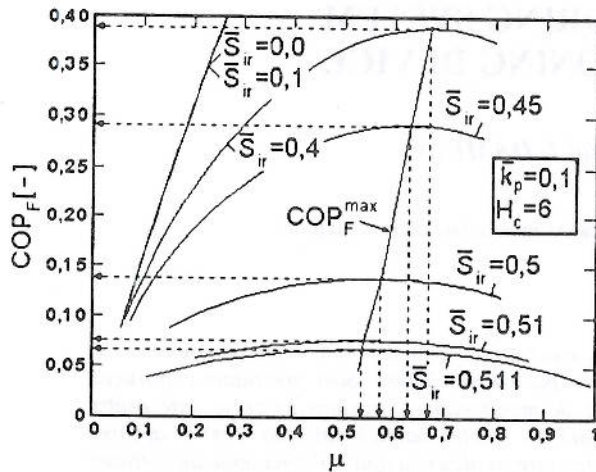


Fig. 6. Variation de  $COP_F$  en fonction de  $\mu$  pour diverses valeurs de  $\bar{S}_{ir}$  et pour  $\bar{k}_{pc} = 0,1$ ,  $H_c = 6$ .

On voit bien les régimes fonctionnels de puissance maximale et on remarque de plus que dans le cas endoréversible ( $\bar{S}_{ir} = 0$ ) les valeurs maximales sont excessives ( $\dot{Q}_{F,rev}^{max} = 2440,4$  (W),  $COP_{F,rev}^{max} = 0,807$  (-), alors qu'une valeur usuelles en pratique ( $\dot{Q}_F = 300$  W et  $COP_F \approx 0,1$  [3]) s'obtient pour une valeur importante de la génération d'entropie non dimensionnelle ( $\bar{S}_{ir} = 0,506$ ), ce qui souligne la forte irréversibilité du processus qui a lieu dans TRH.

L'influence du refroidissement extérieur du TRH, respectivement, pour diverses valeurs de la conductance thermique non dimensionnelle  $\bar{k}_p$ , sur les variations de  $\dot{Q}_F$  et du  $COP_F$ , avec les valeurs de  $H_c = 6$  et  $\bar{S}_{ir} = 0,5$ , est présentée en Fig. 7 et Fig. 8.

De ces deux diagrammes on remarque l'effet positif sur les performances du TRH non adiabatique une fois

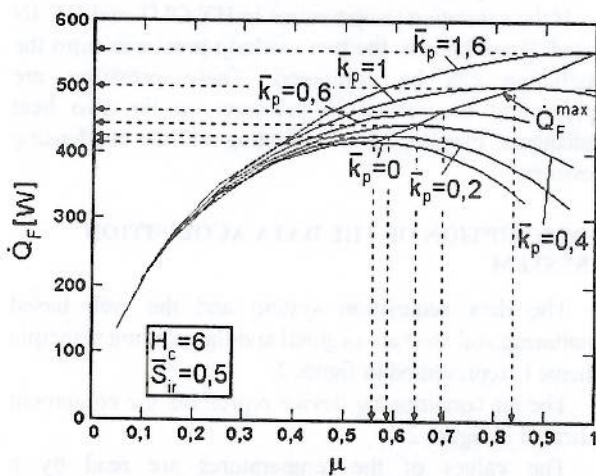


Fig. 7. Variation de  $\dot{Q}_F$  en fonction de  $\mu$  pour diverses valeurs de  $\bar{k}_{pc}$  et pour  $\bar{S}_{ir} = 0,5$ ,  $H_c = 6$ .

que le refroidissement devient de plus en plus fort (augmentation de 33% pour  $\dot{Q}_F^{max}$  et  $COP_F^{max}$ ), lorsque la valeur optimale  $\mu_{opt}$  augmente d'une manière importante, atteignant même sa valeur maximale ( $\mu_{opt} = 1$ ) pour une valeur très grande de  $k_p = 1,6$ .

Tenant compte des conclusions des résultats obtenues à partir du modèle proposé dans ce travail, et en les rapportant aux données expérimentales publiées [1-6], d'une manière générale on peut apprécier que ces résultats de la résolution numérique pour la production du froid, mettent en évidence l'existence des régimes fonctionnelles de puissance frigorifique maximale, caractérisés par des valeurs optimales de la fraction du débit froid, et d'une génération importante d'entropie, montrant une bonne concordance avec les données expérimentales.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ranque, G., *Expériences sur la Détente Giratoire avec Productions Simultanées d'un Echappement d'air Chaud et d'un Echappement d'air Froid*, J. de Physique et Radium No. 4(7), 1933, p. 112.
- [2] Hilsch, R., *The Use of the Expansion of Gases in a Centrifugal Field as Cooling Process*, Rev. Sci. Instrum. No. 18(2), 1947, p. 108-1113.
- [3] Radcenco, V., *Générateurs tourbillonnaires de froid et de chaleur*, Edition Tehnica, Bucurest, 1992 (en Roumaine).
- [4] Kurosaka, M., *Acoustic Streaming in Swirling Flow and the Ranque - Hirsch (Vortex Tube) Effect*, J. Fluid Mech. No. 124, 1982, p. 139.
- [5] Kurosaka, M., Chu, J.Q., Goodman, J.R., *Ranque - Hirsch Effect Revisited: Temperature Separation Traced to Orderly Spinning Waves or Vortex Whistle*, conference of Am Inst. of Aero & Astro 1982.
- [6] Gordon, J.M., Ng, K.C., *Cool Thermodynamics*, Cambridge International Science Publishing, 2000.

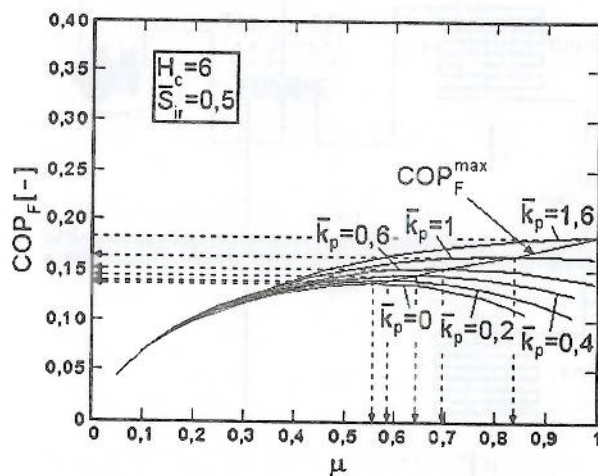


Fig. 8. Variation de  $COP_F$  en fonction de  $\mu$  pour diverses valeurs de  $\bar{k}_{pc}$  et pour  $\bar{S}_{ir} = 0,5$ ,  $H_c = 6$ .