

# ANALIZA STRUCTURILOR DIN STICLĂ

Drd. ing. Ciprian POPA

Universitatea Tehnică de Construcții, București, Romania

**REZUMAT.** Articolul prezintă particularitățile calcului structurilor de sticlă, evidențind tipurile de metodologii de modelare matematică, tipurile de analize structurale ce se pot efectua prin calcul manual și calcul cu element finit. În a patra parte a articolului este evidențiat un studiu de caz pe un proiect real, o balustradă de sticlă pentru un centru comercial situat în Timișoara. Această structură este abordată printr-o metodă MEF și prin calcul manual, iar la sfârșit se realizează comparații între cele două metode și se trag concluzii privind validitatea rezultatelor.

**Cuvinte cheie:** sticlă structurală, proiectare MEF sticlă, calcul structuri din sticlă, analiză structuri din sticlă.

**ABSTRACT.** This article showcases the particularities for designing glass structures by illustrating the different methods available for mathematical modelling, comparing the different analysis types that can be applied using automatic and hand calculation. In the 4th chapter of this article a real case study is presented regarding the design of a cantilevered glass balustrade situated in Timișoara, Romania. This structure is analysed using a FEM method and hand calculation and in the end the results are compared and conclusions are drawn regarding the efficiency of the two methods.

**Keywords:** Structural Glass, FEM Analysis of Glass Structures, Glass Structures Global and Local Analysis.

## 1. INTRODUCERE

[1] Principiile ce stau la baza alcătuirii modelelor matematice computerizate pentru structuri de sticlă, în special cele bazate pe element finit (MEF) sunt similare principiilor aplicate celorlalte materiale de construcții. Analiza structurală implică echilibrarea modelării precise cu timpul de obținere a soluției. O abordare recomandată aici este analiza secvențială, unde un model simplificat global și alte modele detaliate sunt analizate iterativ.

Problemele de analiză pentru structurile de cabluri sunt descrise în continuare și sunt generate de proprietățile materialelor și a inter-straturilor de legătură. Este prezentată și utilizarea diferitelor tipuri de elemente finite (grindă, shell, volum și contact).

## 2. TEHNICI DE MODELARE

### 2.1. Metodologie

Nivelul de precizie adoptat pentru model trebuie să fie corespunzător dimensiunii structurii. Se pot alege una sau mai multe abordări în modelarea cu element finit astfel: fie un model simplificat global și o serie de modele locale create complementar pentru studiul distribuției de tensiuni pe o porțiune discretă, fie un model global complet cu toate aspectele structurale.

În primul caz, modelul simplificat permite studiul eficient al comportamentului global pentru determinarea deformațiilor și reacțiilor. Modelul

simplificat este completat apoi cu modele detaliate local în cadrul cărora se poate studia distribuția de tensiuni și efectele locale. A doua situație propune un model unic complet detaliat, ce ține cont de toate aspectele precum reacțiuni, deplasări și forțe interne. O astfel de analiză mărește timpul de calcul și permite mai greu crearea de scenarii multiple în timpul procesului de proiectare. Însă, întregul proiect este într-un singur fișier pentru a evita crearea de mai multe modele de analiză ce trebuie actualizate ulterior.

În dezvoltarea modelului de calcul al sticlei structurale, comportarea structurii principale de rezistență trebuie luată în considerare și reprezentată în mod realist. Așadar, acordarea unei atenții sporite detalierii este esențială. Trebuie utilizate elemente speciale neliniare de contact. O problemă de luat în considerare este mișcarea relativă a punctelor de prindere de structură. Deformația posibilă a structurii suport poate fi indusă prin cazuri de încărcare aplicate modelului. Acestea pot fi procesate ulterior în combinații mai avansate.

### 2.2.. Model unic simplificat

Un exemplu de model global este în figura 1, iar în figura 2 putem observa structura reală. În astfel de situații, se poate modela cu elemente shell 2D. Pentru sticlă laminată grosimea elementelor de tip shell se alege în funcție de grosimea efectivă (echivalentă). În Eurocode și ASTM sunt prezentate numeroase metode de calcul. Alternativ, grosimea efectivă se

poate calcula utilizând un element finit conceput special.

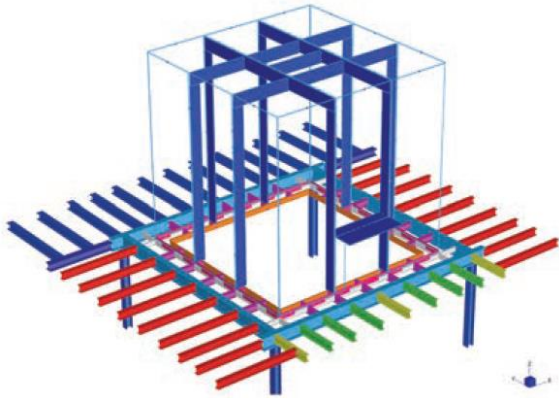


Fig. 1. Exemplu de model global vestibul intrare.



Fig. 2. Magazin Apple, vestibul intrare.

Din cauza grosimii efective (echivalente) grosimea modelată este mai mică decât grosimea reală a sticlei luminate și în acest caz trebuie făcute unele corecții ale încărcării permanente pe modelul global pentru a compensa reducerea de greutate.

Nu este necesară includerea golurilor ce penetrează sticla și nici a rotunjirilor și prelucrărilor marginilor panoului. Aceste aspecte nu sunt relevante pe un model global unde se urmărește comportamentul general. Prelucrările și detaliile însă trebuie să fie surprinse pe modele locale detaliate ce au ca scop studiul distribuției de tensiuni la nivel de element.

Similar, îmbinările sticlă-sticlă se realizează pe substructuri în care elementele constituente ale unei îmbinări pot fi modelate utilizând grinzi unidirecționale sau legături cu anumite grade de flexibilitate. Un exemplu este afișat în fig. 4.3. Atunci când rigiditatea la încovoiere și rigiditatea la torsiune a unei îmbinări contribuie la stabilitatea structurii, acestea trebuie modelate corespunzător. Această ipoteză asigură un nivel de detaliu pentru calculul comportamentului global al deformațiilor și al reacțiunilor. O tehnică mai detaliată este modelarea îmbinărilor la nivel de model local pentru stabilirea corectă a distribuției de tensiuni.

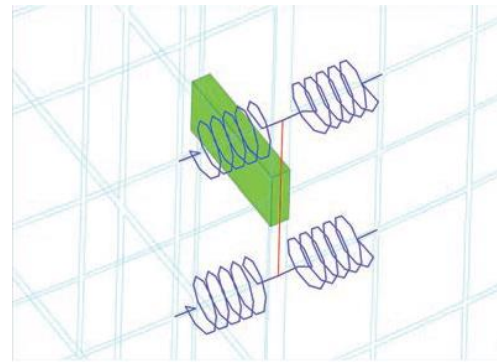


Fig. 3. Model simplificat pentru o îmbinare cu șurbi pe model global.

## 2.3. Modele locale detaliate

Modelele locale detaliate au rolul de a fi complementare modelului simplu global. Se pot crea moduri locale simplificate pentru analiza comportamentului și a distribuției de tensiuni într-o regiune a unei îmbinări sticlă-sticlă sau se poate analiza comportarea unei îmbinări spațiale. Elementele 3D de volum se pot utiliza similar figurii 4. Modelul global și modelul local detaliat nu sunt total independente. Cele două procese interacționează și iterațiile sunt necesare.

Condițiile de contur simetrice se vor utiliza pentru a reduce dimensiunile unui model. Acest lucru permite reducerea timpului de calcul. În unele situații modelarea cu elemente 2D plane poate fi benefică; un exemplu se regăsește în figura 5.

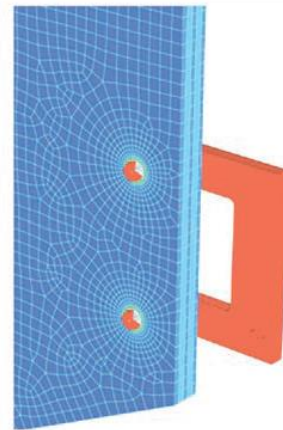


Fig 4. Îmbinare cu surburi, model local.

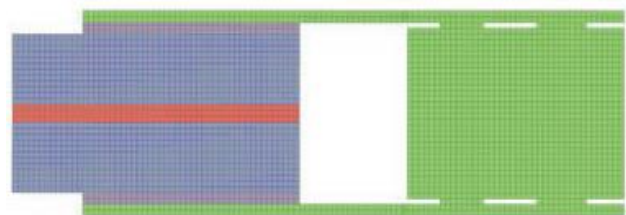


Fig. 5. Îmbinare cu lipire, pe un model 2D de efort-deformație

## 2.4. Model global detaliat

Uneori este necesară modelarea în detaliu a tuturor elementelor pentru a putea ține seama de influența acestora. Însă, unele simplificări se pot realiza fără a pierde din precizia rezultatelor analizei.

Un exemplu este afișat în figură 4.6, iar structura reală se poate vedea în figura 4.7.

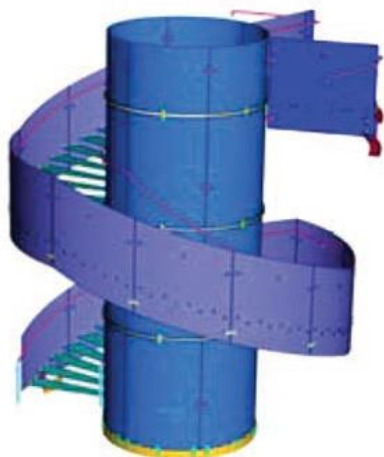


Fig. 6. Exemplu de scara pe model global detaliat.



Fig. 7. Scara elicoidală din sticlă pe 5th Avenue, New York.

[2] Unul dintre motivele alegerii unui astfel de model este stabilirea tensiunilor din sticlă în jurul îmbinărilor; găurile din sticlă din dreptul îmbinărilor trebuie să fie incluse în rețeaua de elemente finite cu o discretizare locală suplimentară. Figura 4.8 exemplifică modul corect de țesere a rețelei de elemente finite în jurul unui nod al îmbinării. Îmbinarea trebuie să țină cont de toate materialele ce intră în alcătuirea acesteia. Metoda de transfer a încărcărilor trebuie și ea modelată; de exemplu crearea unei îmbinări ce lucrează doar la compresiune. Modelarea cu elemente finite 2D de tip shell furnizează rezultate suficient de precise. Însă trebuie ținut cont de efectul efortului crescut dat de acțiunea compozită prin panoul laminat în proximitatea îmbinării. Grosimea efectivă a elementelor 2D se poate modifica în proximitatea conexiunii pentru a ține cont de acest aspect.

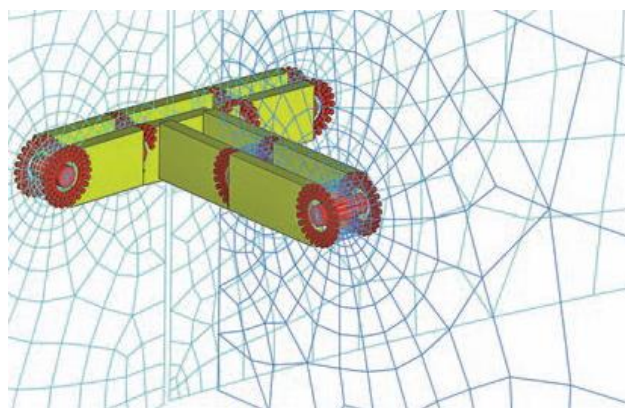


Fig. 7. Îmbinare cu buioane T a unui model global.

## 3. TIPURI DE ANALIZĂ

### 3.1 Calcul liniar vs calcul neliniar

O comparație sumară între rezultatele din calcul liniar și cel neliniar este prezentată în acest capitol și în același timp, se justifică motivul pentru care este necesară o analiză neliniara avansată.

### 3.2. Analiză liniar elastică

Aceasta este cea mai simplă analiză a unui model structural. Se poate aplica atunci când relația dintre efort și deformații este liniară, când deformațiile structurale sunt „mici”, cum ar fi jumătate din grosimea panoului. Timpul de rulare a analizei este scurt chiar și pentru modele complexe. Principiul superpoziției efectelor este complet aplicabil, ceea ce înseamnă că pe baza cazurilor de încărcare se pot face oricâte combinații de încărcare. Acolo unde se poate aplica, este chiar recomandat calcul liniar. Însă așa cum se poate vedea în următorul subcapitol, o astfel de aproximare nu este întotdeauna potrivită.

### 3.3. Tipuri de analiză

[3] În analiza cu element finit, comportarea neliniară este împărțită în următoarele categorii:

**Neliniaritate geometrică.** Atunci când o placă este supusă micilor deformații, tensiunile sunt datorate în principal încovoierii. Pe măsură ce deformațiile cresc, distribuția acestora trece de la teoria de încovoiere la teoria de membrane. Această trecere are loc atunci când deformațiile sunt aproximativ egale cu grosimea plăcii. În domeniul deplasărilor mici, analiza liniară este potrivită. În domeniul deformațiilor mari, analiza liniară supraestimează tensiunea din placă conducând la o proiectare imprecisă. O



analiză geometrică neliniară, cum ar fi  $P\Delta$ , este mai potrivită în astfel de situații.

Alte aspecte care sunt potrivite analizei neliniare au în vedere deplasările inițiale ale reazemelor, imperfecțiunea elementelor așa cum este descrisă în capitoul 2, deformațiile componentelor – toate acestea influențând rigiditatea structurală (de ex. analiza de stabilitate unde imperfecțiunile inițiale sunt aplicate pe structură înainte de aplicarea încărcărilor).

**Nelinaritate de material.** Sticla este un material perfect elastic până în momentul cedării. Aceasta are un modul de elasticitate constant, fără plastifieri sau punct de intrare în curgere. De aceea, analiza materialului ca fiind liniar elastic este corectă. Însă alte materiale utilizate la alcătuirea structurilor de sticlă nu se comportă liniar elastic. Acestea includ stratul intermediar, adezivii de silicon, îmbinările metalice care se pot proiecta în plastic. Dacă este necesară modelarea precisă a acestora, se poate crea un model neliniar hiperstatic atunci când materialul este supus unor deformații mari.

**Condiții de contur neliniare.** În mod obișnuit, condițiile de rezemare rămân rigide în timpul aplicării încărcărilor (cum ar fi încovoierea elastică sub cadre flexibile, problemele de contact sau rezemări ce lucrează doar la compresiune/întindere); aceste efecte trebuie incluse în model.

Elemente speciale de contact, cum ar fi reazeme ce lucrează doar la compresiune sau resoarte pot fi utilizate.

Ipoteza rezemării simple pentru stabilirea condițiilor de contur trebuie adoptată cu mare atenție, pentru a nu permite ca muchiile libere să se rotească în jurul propriei axe. Considerând o rezemare infinit rigidă în toate direcțiile și liberă la rotații în plan ortogonal, nu se manifestă o influență asupra distribuției de tensiuni și deformații.

## 4. EXEMPLU DE PROIECTARE

În continuare se va prezenta metoda de calcul și dimensionare a unei balustrade de sticlă. Studiul de caz este efectuat pentru proiectarea unei balustrade de sticlă (Fig.8) amplasată într-un centru comercial Lidl din orașul Timișoara. Pentru acest element structural s-a efectuat un calcul automat utilizând programul de calcul cu element finit SCIA Engineer, printr-un modul de proiectare integrată Laminated Glass Design și separat un calcul manual folosind mediul Design Forms. La final se prezintă o analiză comparativă între cele două calcule. Atât modulul Laminated Glass Design precum și aplicația Design Forms sunt dezvoltate de autorul articolului (Ciprian Popa) cu sprijinul companiei Nemetschek Romania Sales & Support SRL.

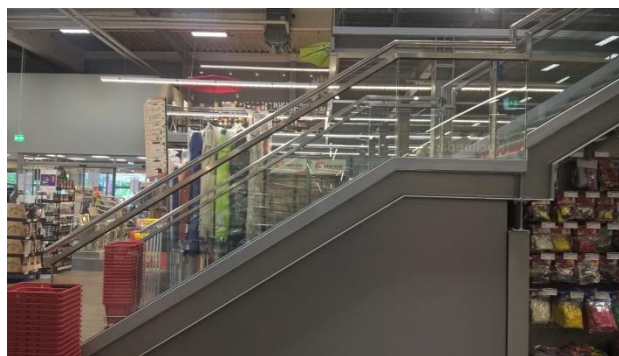


Fig. 8. Vedere laterală balustradă de sticlă.

### 4.1 Descriere modelelor de calcul

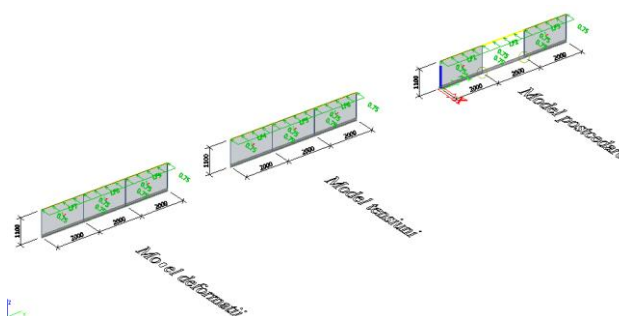


Fig. 9. Modele de analiză Scia Engineer.

Analiza s-a efectuat pe 3 panouri din sticlă în consolă, legată la partea superioară și inferioară prin profile metalice așa cum se poate observa în figura 9. Panourile au o înălțime  $h = 1,10$  m și sunt alcătuite din 3 tronsoane de lungime 2 m.

Primul model are panouri de grosime 15 mm rezultată din calculul grosimii efective pentru deformații ținând cont de interacțiunea dintre lamele în prezența foliei din categoria „0”.

Al doilea model are panouri de grosime 17 mm, rezultată din calculul grosimii efective pentru evaluarea capacității la încovoiere, ținându-se cont de interacțiunea dintre lamele în prezența foliei din categoria „0”.

Al treilea model are panouri de grosime 17 mm rezultată din calculul grosimii efective pentru evaluarea capacității la încovoiere luându-se în calcul interacțiunea dintre lamele în prezența foliei din categoria „0”. În acest caz se analizează ipoteza cedării unui panou central și se studiază redistribuția eforturilor prin intermediul mâinii curente metalice. Analiza s-a efectuat pe 3 panouri din sticlă în consolă, legată la partea superioară și inferioară prin profile metalice. Panourile au o înălțime  $h = 1,10$  m și sunt alcătuite din 3 tronsoane de lungime 2 m.

deformații ținând cont de interacțiunea dintre lamele în prezența foliei din categoria „0”.

Asupra tuturor modelelor acționează o singură forță la vârf distribuită uniform, având valoarea de 0,75 kN/m.

4.2. Calcul MEF

În figura 10 se poate vizualiza distribuția de deformații de-a lungul elementelor finite de tip shell pe modelul de grosime echivalentă pentru deformații.

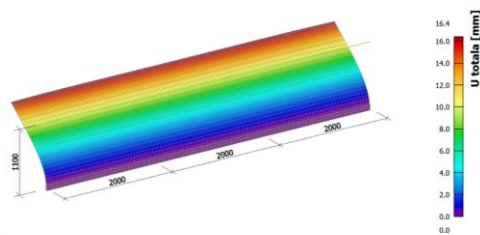


Fig. 10. Model 1:  
Deplasare maximă SLS - model deformații  
(Captură SCIA Engineer).

Din cauza comportamentului neductil, analiza elementelor structurale alcătuite din sticlă trebuie efectuată în domeniul Tensiunilor principale  $\sigma_1$  respectiv  $\sigma_2$ , a caror distribuție se poate observa în figurile 11 și 12.

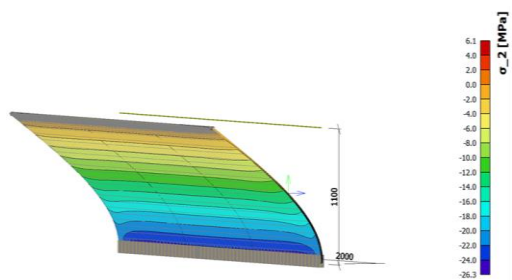


Fig. 11. Model 2 - Tensiuni Principale  $\sigma_2$   
(Captură SCIA Engineer)

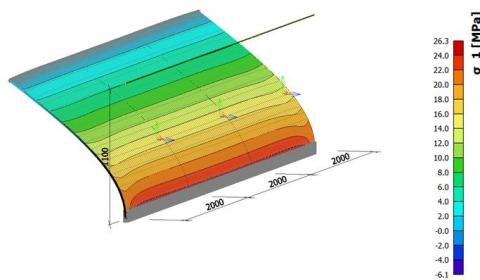


Fig. 12. Model 2 - Tensiuni Principale  $\sigma_1$   
(Captură SCIA Engineer)

În vederea asigurării unei redundanțe structurale, s-a considerat ipoteza cedării unui panou central cu scopul de a se evidenția redistribuția de tensiuni principale către panourile adiacente, așa cum este ilustrată în figurile 13,14.

În final, modulul de proiectare integrată Laminated Glass Design va raporta solicitarea la capacitate și va afișa o distribuție a raportului de verificare unitară la nivel de element finit după cum se poate observa în figura 15.

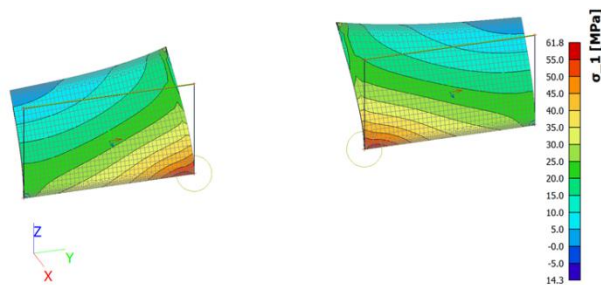


Fig. 13. Model 3 - Tensiuni  $\sigma_1$  in ipoteza cedării unui panou (Captură SCIA Engineer).

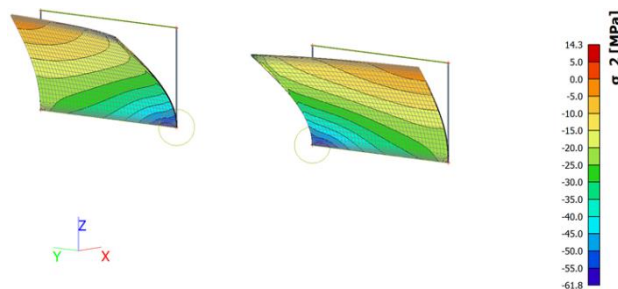


Fig. 14. Model 3 - Tensiuni  $\sigma_2$  in ipoteza cedării unui panou (Captură SCIA Engineer).

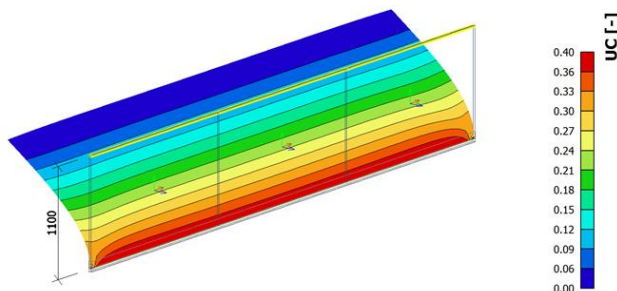


Fig. 15. Verificare unitară sticlă  
(Captură SCIA Engineer).

În figura 16 se pot vizualiza rezultatele detaliate ale unei verificări efectuate în interiorul programului SCIA Engineer.

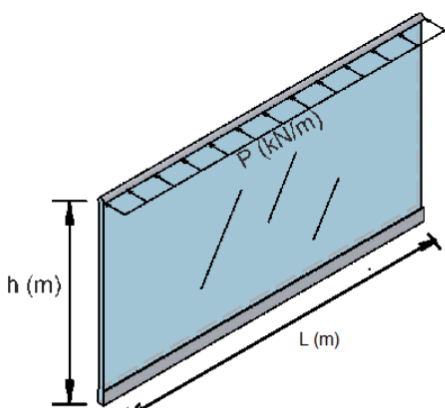
**Evaluare rezistența sticlă:**

$K_{sp} = 1 = 1$   
S-a ales sticlă calită.  
 $f_{tk} = 120 \cdot 10^6 = 120 \cdot 10^6 = 120 \text{ MPa}$   
Sticlă este întărită termic.  
 $K_{mod} = \frac{E_{ULSG} + E_{ULSZ} + E_{ULSV} + E_{ULSL} + E_{ULSB}}{K_{modg} + K_{modz} + K_{modv} + K_{modl} + K_{modsb}} = \frac{0 + 0 + 0 + 0 + 1}{0.29 + 0.41 + 0.74 + 0.6 + 0.77} = 0.77$   
 $K_{mod} = \max(0.25; K_{mod}) = \max(0.25; 0.77) = 0.77$   
Sticlă din silicat de sodiu  
 $f_{tk} = 45 \text{ MPa}$   
 $E = 70 \text{ GPa}$   
 $f_{egd} = \frac{K_{mod} \cdot K_{sp} \cdot f_{tk} + K_v \cdot (f_{tk} - f_{tkk})}{Y_{MA} + Y_{MV}} = \frac{0.77 \cdot 1 \cdot 45 \cdot 10^6 + 1 \cdot (120 \cdot 10^6 - 45 \cdot 10^6)}{1.8 + 1.2} = 81.8 \text{ MPa}$   
Sticlă are muchiile neslefuite.  
 $K_e = 0.8$   
Rezistența muchiilor extreme este de:  
 $f_{egd} = K_e \cdot f_{egd} = 0.8 \cdot 81.8 \cdot 10^6 = 65.4 \text{ MPa}$   
**Capacitate sticlă**  
 $f_{egd} = K_e \cdot f_{egd} = 0.8 \cdot 81.8 \cdot 10^6 = 65.4 \text{ MPa}$   
 $\sigma_{max} = \max(\text{abs}(\sigma_{1\_top}), \text{abs}(\sigma_{2\_top}), \text{abs}(\sigma_{1\_bot}), \text{abs}(\sigma_{2\_bot})) = \max(\text{abs}(26.3 \cdot 10^6), \text{abs}(6.06 \cdot 10^6))$   
 **$\sigma \text{ max} < f \text{ egd}$**  ✓  
Verificarea unitară este 0.402.  
Deformația maximă admisibilă este 24.4 mm.

Fig. 16. Verificare element finit sticlă în SCIA Engineer.

4.3 Calcul manual

Calculul manual s-a efectuat prin crearea unui script cu ajutorul Platformei Design Forms, tehnologie deținută de compania SCIA. Avantajul acestei soluții software este operarea simplificată cu variabile ingineresti și redactarea transparentă, cu tot cu substituții, a relațiilor de calcul. Un exemplu se poate observa în figura 17, unde este ilustrată evaluarea forțelor la baza consolei din sticlă.



**Forțe ce acționează asupra balustradei:**

O încărcare  $P = 0.75 \text{ kN/m}$  distribuită uniform de-a lungul balustradei la înălțimea  $h = 1.1 \text{ m}$ .  
 Încărcarea uniform distribuită de proiectare este:  
 $UDL_{ult} = P \cdot \gamma_G = 750 \cdot 1.5 = 1.13 \text{ kN/m}$   
**Moment de încovoiere de proiectare distribuit este de:**  
 $BM_{ult} = UDL_{ult} \cdot h = 1125 \cdot 1.1 = 1.24 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$

Fig. 15. Evaluare forțelor în consola de sticlă.

Evaluarea rezistențelor s-a realizat prin metoda grosimii echivalente corespunzătoare ipotezei de calcul cât și pachetului alcătuit din sticlă securizată și folie PVB. Verificarile sunt de tip SLS (Stare limită de serviciu – Figura.16 și de tip SLU (Stare limită ultimă) – Figura.17.

Pachetul ce alcătuieste sticla lamelara are grosimea totala de:

$$t_{total} = t_{intreg} + t_{interlayer} = 0.024 + 1.5 \cdot 10^{-3} = 25.5 \text{ mm}$$

$$I = \frac{m \cdot h_{ef,w}^3}{12} = \frac{1 \cdot 0.0151^3}{12} = 288000 \text{ mm}^4/\text{m}$$

$$E = 70 \text{ GPa}$$

$$\delta = \frac{P \cdot h}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{750 \cdot 1.1}{3 \cdot 70 \cdot 10^9 \cdot 288 \cdot 10^{-9}} = 13.6 \text{ mm}$$

\*Deformațiile nu tin cont de rotirea reazemelor, acestea necesitand o analiza de ansamblu a întregii balustrade.

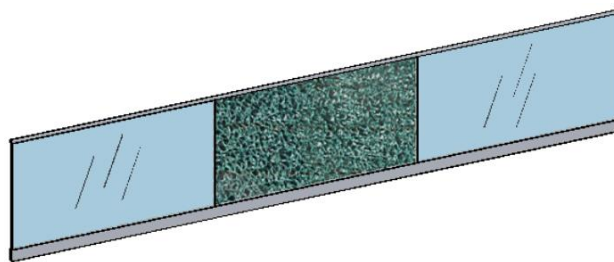
**Verificare deformații:**

**Displacements OK** ✓

Deformațiile limita sunt consumate in procent de 54.6%.

Fig. 16. Verificare deformații pentru combinațiile SLS.

În ipoteza SLU s-a considerat cedarea unui panou central și redistribuția încărcărilor către panourile adiacente, similar simulării MEF. Dimensionarea sticlei s-a realizat astfel încât rezistența sa să acopere excesul de tensiuni, așa cum este ilustrat în figura 17.



**Încărcare aditionala din balustrada/mâna curenta**

$$F = \frac{L \cdot P \cdot \gamma_G}{2} = \frac{2 \cdot 750 \cdot 1.5}{2} = 1.13 \text{ kN}$$

Reacțiunea este distribuita la 1.1 m, ceea ce conduce la o încărcare distribuita de:

$$q_a = \frac{F}{h} = \frac{1125}{1.1} = 1.02 \text{ kN/m}$$

Acțiunea se poate suprapune celei originale,

$$UDL_{ult2} = UDL_{ult} + q_a = 1125 + 1023 = 2.15 \text{ kN/m}$$

**Moment încovoietor aplicat**

$$M = h \cdot UDL_{ult2} = 1.1 \cdot 2148 = 2.36 \text{ kN}\cdot\text{m/m}$$

Fig. 17. Evaluare redistribuției de efort prin mâna curentă metalică.

4.4. Comparație MEF vs calcul manual

Tabelul 1. Comparații rezultate

	Deformații maxime (mm)			Tensiuni maxime (N/mm²)		
	Calcul manual	MEF	Limită	Calcul manual	MEF	Limită
Model 1	13.6	16.1	24.4			
Model 2				25.83	26.3	65.4
Model 3				49.2	61.8	65.4

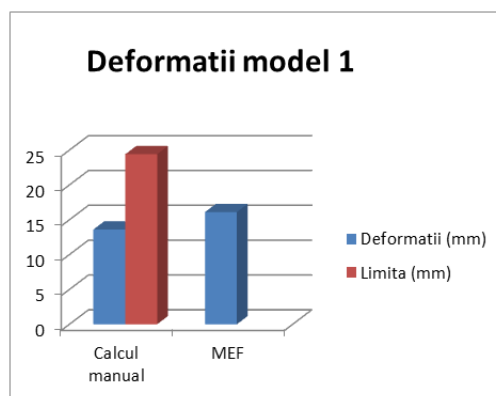


Fig. 18. Comparații pentru Modelul 1.

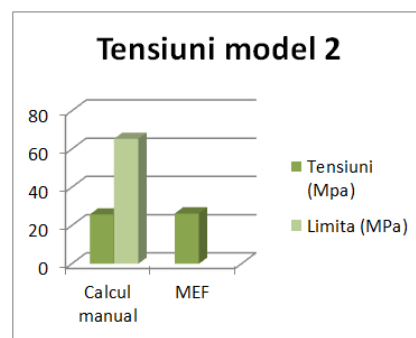


Fig. 19. Comparații pentru Modelul 2.

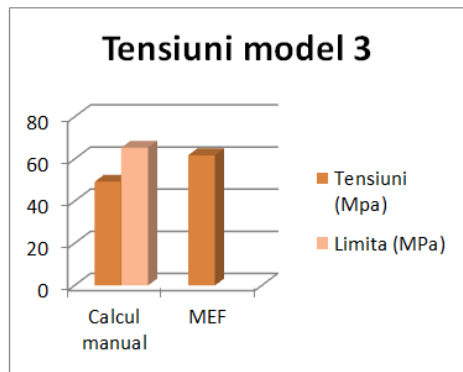


Fig. 20. Comparații pentru Modelul 3.

## 5. CONCLUZII

Modelarea cu metoda elementului finit furnizează deformații mai mari cu 18% și tensiuni mai mari cu 25%. Calculul manual simplificat pe o consolă nu surprinde comportamentul de placă al unui element tip balustradă și nu ține cont de apariția concen-

tratorilor de eforturi, așa cum se poate observa în figura 21. [2].

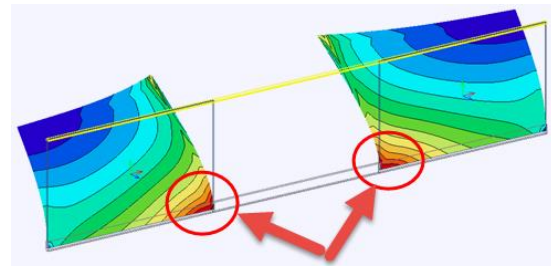


Fig. 21. Evidențierea concentratorilor de eforturi.

## BIBLIOGRAFIE

- [1] O'Regan, C., *Structural use of glass in buildings*, Volumul 2, octombrie 2015, Londra, Regatul Unit.
- [2] Pilkey, W.D., Pilkey, D.F., *eterson's stress concentration factors*. Editura Wiley Publishing, 2008, NJ, SUA,
- [3] Feldmann, M. Kasper, R. *Guidance for European Structural Design of Glass Components*. JRC Scientific and Policy Reports, 2014, Ispra, Italia.

## Despre autor

Drd.ing. **Ciprian POPA**

Universitatea Tehnică de Construcții, București, România

Autorul este de profesie inginer constructor, în prezent student doctorand în anul III la Facultatea de Construcții Civile Industriale și Agricole în cadrul UTCB. Teza sa de doctorat este realizată sub îndrumarea prof.dr.ing. Crețu Dan-Ilie cu titlul „Proiectarea structurilor de sticlă în zone seismice”. În cadrul studiilor sale, pe lângă sintetizarea aspectelor teoretice, a dezvoltat o aplicație software de tip plug-in pentru programul belgian de calcul structural SCIA Engineer. Autorul asigură suport tehnic și training pentru compania Nemetschek România Sales & Support SRL, pentru programele Allplan și SCIA Engineer având o experiență de peste 6 ani în predarea acestora, atât în România precum și în alte țări (Croatia, Cipru, Canada, Moldova, Australia, Singapore, India, Germania). Mai multe detalii legate de activitatea sa de cercetare se regăsesc pe pagina de internet: [www.structuralglass.org](http://www.structuralglass.org).