RECONSIDÉRATION DES PHÉNOMÈNES DE TRANSFERT DANS L'APPROCHE EN THERMODYNAMIQUE EN DIMENSIONS PHYSIQUES FINIES

Michel FEIDT[a], Renaud FEIDT[b], Monica COSTEA[c*]

[a]Université de Lorraine, LEMTA, Vandoeuvre-les-Nancy, France
[b]INVIVO Consulting, Nantes, France
[a]Université POLITEHNICA de Bucarest, Département de Thermotechnique, Moteurs, Equipement Thermique et Frigorifique, Bucarest, Romania

Résumé. On propose ici de reconsidérer les phénomènes de transfert dans le cas des régimes dynamiques stationnaires, mais en Thermodynamique en Dimensions Physiques Finies (TDPF). Le premier cas considère la conduction thermique. Le modèle série ne conduit pas à une optimisation générique. Le modèle parallèle, par contre, aboutit à un optimum qui se traduit par une équipartition de résistances thermiques. Ce résultat est généralisable. La discussion des résultats, leur extension à d'autres conditions aux limites et pour d'autres fonctions objectifs terminera la proposition en indiquant les prolongements possibles à cette étude.

Mots-clés: conduction thermique ; optimisation avec contraintes ; équipartition de résistances thermiques; Thermodynamique en Dimensions Physiques Finies.

1. INTRODUCTION

La Thermodynamique en Dimensions Physiques Finies connait des applications diverses dont les systèmes thermomécaniquesI [1,2], due au fait que la dimension finie peut-être le temps, la géométrie, les conductances thermiques, les débits calorifiques, les énergies, etc.

Le papier rend compte de la méthodologie d'optimisation sous contrainte appliquée aux phénomènes de transfert thermiques, qui peut conduire ou pas à des solutions optimales. L'exemple de la répartition des résistances thermiques d'un mur, modèle série ou parallèle est rapporté ici. On voit que selon la configuration série ou parallèle, les résultats diffèrent fondamentalement. L'extension au couplage série – parallèle est immédiat en géométrie plane.

2. MODELE SERIE D'ISOLATION

2.1. Le modele

Le modèle est relatif à une configuration générale du mur qui est représentée sur la Figure 1.

Le mur comporte N résistances thermiques en série, qui se différencient par leur géométrie (A_i, surface transverse ; e_i, épaisseur du matériau), puis leurs propriétés physiques (λ_i, conductivité thermique du matériau, paramètre supposé constant et non fonction de la température).

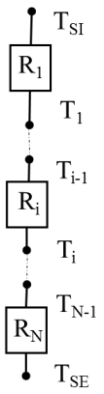


Fig. 1. Configuration générale du montage série

En régime dynamique stationnaire et dans le cas du chauffage, la température intérieure, T_{SI}, est supérieure à T_{SE}, température extérieure.

* Auteur correspondant : liana5802@yahoo.fr

La modélisation du mur isolé est donc ramenée à un problème monodimensionnel dont les effets de bord sont supposés négligeables $(\sqrt{A_i} = \sqrt{A}\ \forall_i >> e_i)$. La racine de l'aire représente la dimension transverse caractéristique du mur grande par rapport aux épaisseurs e_i. La loi de Fourier linéarisée selon l'analogie électrique [3] conduit alors à :

$$\dot{Q}_i = \frac{\lambda_i A}{e_i}\left(T_{i-1} - T_i\right) = \frac{\Delta T_i}{R_i} \qquad (1)$$

On notera enfin que, pour le modèle série d'isolation on a $\dot{Q}_i = \dot{Q}_{Tot}, \forall_i$ (conservation du flux thermique transmis le long de la chaîne de résistances thermiques).

2.2. Les conditions aux limites

L'hypothèse d'un régime dynamique stationnaire simplifie le problème en excluant la nécessité de conditions initiales. Il ne subsiste que les conditions aux limites. Celles-ci sont liées à la dimension finie, épaisseur du mur $e_T = \sum_i e_i$.

Les conditions aux limites peuvent revêtir 3 formes classiques pour les deux conditions aux frontières du mur (face chaude et face froide) :

a) condition de température imposée :
Condition intensive ou de Dirichlet.
Dans le cas du mur, cela correspond à $R_{int} = R_0$, $R_{ext} = R_{N+1}$, telles que conformément à (1) : $T_{SI} = T_1$; $T_{SE} = T_N$. R_{int} et $R_{ext} = 0$.

b) condition de flux imposé :
Condition extensive ou de Neumann.
Dans le cas du mur, cela correspond à $\dot{Q}_i = \dot{Q}_{Tot} = \dot{Q}_0$ imposé.

c) condition mixte ou de Fourier
Le plus souvent, cette condition fait intervenir un transfert de chaleur linéaire à la frontière, conformément à :

- au bout chaud

$$\dot{Q}_{\text{int}} = \frac{T_{SI} - T_0}{R_{\text{int}}} = \frac{T_0 - T_1}{R_1} \qquad (2)$$

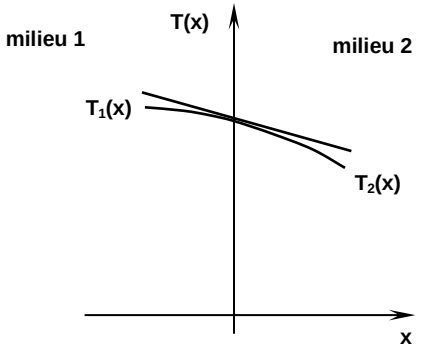
- au bout froid

$$\dot{Q}_{ext} = \frac{T_N - T_{SE}}{R_{ext}} = \frac{T_{N-1} - T_N}{R_N} \qquad (3)$$

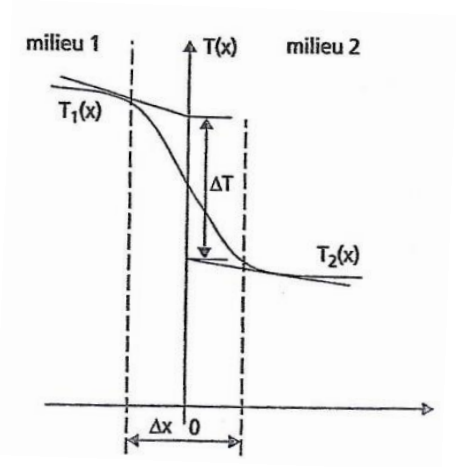
ce qui rajoute 2 résistances thermiques d'interface interne et externe dans le modèle.

Remarque : le modèle rapporté ici suppose des contacts thermiques parfaits conformément à la Figure 2.a.

Dans la réalité un contact réel reste imparfait (Figure 2.b), d'où la nécessité d'aménagement du modèle.



a) contact parfait



b) contact réel

Fig. 2. Illustration du contact thermique des deux milieux.

Dans la suite, nous utiliserons l'hypothèse de contacts parfaits entre les milieux successifs, et nous limiterons à la condition aux limites de Dirichlet.

2.3. Démarche d'optimisation

La relation (1) permet de préciser l'optimisation à effectuer en présence d'une contrainte. On ne discute ici que de l'isolation, mais la transposition en conduction est immédiate.

Le Tableau 1 rend compte des alternatives disponibles.

Par sommation sur *i* de la relation (1), il vient :

$$\dot{Q}_{Tot} \cdot R_T = \Delta T_S \qquad (4)$$

avec $\Delta T_S = T_{SI} - T_{SE}$.

Tableau 1

Transfert de chaleur en paroi contrainte

Fonction objectif d'isolation	Contrainte imposée
$\min \dot{Q}_{Tot} \leftrightarrow MAX\, R_T$	ΔT_S
$MAX\, \Delta T_S \leftrightarrow MAX\, R_T$	$\dot{Q}_{Tot}$
$\min \dot{Q}_{Tot} \leftrightarrow \min \Delta T_S$	R_T

La dernière ligne du Tableau 1 montre qu'à isolation imposée (R_T), la déperdition minimale correspond à l'écart de température ΔT_S minimale (la limite est l'équilibre thermique).

Par contre, à écart de température imposé, on recherchera le maximum de résistance thermique, qui correspondra à la déperdition minimale. Par voie de conséquence, MAX R_T correspond à MAX $R_i \forall_i$. Il n'y a pas d'optimum vrai, et par ailleurs les résistances de contact imparfaites sont favorables.

En rappelant que A est paramètre, l'optimum recherché correspond aussi à MAX e_i. On voit que le minimum de $\dot{Q}_{Tot}$ est monotone décroissant des e_i. Si les λ_i sont différents, il faut choisir le matériau le plus isolant, avec l'épaisseur maximale :

$$\min \dot{Q}_{Tot} = \frac{\Delta T_S \cdot A \cdot \lambda_{\min}}{e_T} \qquad (5)$$

avec $e_T = \sum_i e_i$. En fait, cette condition fait apparaître la contrainte de dimension finie en épaisseur. Celle-ci, qui est purement thermique, doit être conjuguée avec les contraintes mécaniques (résistance mécanique du mur) et les contraintes d'hygrométrie couplage transfert de chaleur – transfert de matière, conduisant au positionnement du pare vapeur.

Remarque 1 : le choix entre isolation intérieure et extérieure relève plutôt de l'inertie thermique et donc du régime transitoire du mur.

Remarque 2 : la répartition des entropies produites pourrait être étudiée. On laisse faire le lecteur à titre d'exercice.

3. MODELE PARALLELE D'ISOLATION

3.1. Le modèle

La configuration générale du mur est représentée sur la Figure 3.

On traitera ici encore le cas de l'isolation thermique, dans les conditions aux limites de Dirichlet ($\Delta T_S = T_{SI} - T_{SE}$, paramètre) et en régime dynamique stationnaire.

Le modèle parallèle est bien adapté à la modélisation de la complémentarité de modes de transfert thermique (par exemple convectif et radiatif) ainsi que pour des structures poreuses, ou des matériaux non homogènes.

Nous n'entrerons pas dans les détails, mais illustrerons la problématique sur un mur de dimensions finies (A, aire transversale finie) et qui offre donc un linéique (périmètre du mur) sujet à des pertes thermiques.

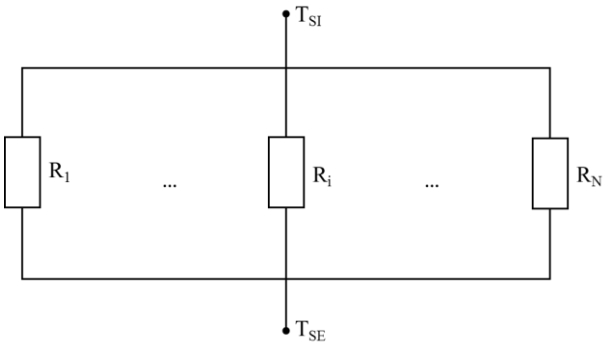


Fig. 3. Configuration générale du montage parallèle

Il en résulte donc

- une perte thermique surfacique telle que :

$$\dot{Q}_A = \frac{\Delta T_S}{R_A} \qquad (6)$$

- une perte thermique linéique telle que :

$$\dot{Q}_L = \frac{\Delta T_S}{R_L} \qquad (7)$$

Le flux thermique de perte totale s'écrit par combinaison de (6) et (7) :

$$\dot{Q}_{Tot} = \Delta T_S \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_L} \right) = \frac{\Delta T_S}{R_{eq}} \qquad (8)$$

Il apparaît ainsi une résistance thermique équivalente R_{eq} telle que :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_L} + \frac{1}{R_A} \qquad (9)$$

3.2. Démarche d'optimisation

Dans le cas considéré, il apparaît que le minimum de $\dot{Q}_{Tot}$ correspond au maximum de R_{eq} (ou au minimum de $1/R_{eq}$). Le cas idéal suppose R_L

et R_A tendant vers l'infini, solution mathématique, mais non physique.

La contrainte de dimensions physiques finies conduit à rechercher la meilleure répartition des fuites thermiques, compte tenu d'une résistance thermique totale R_T à distribuer.

Celle-ci doit satisfaire en particulier une géométrie raisonnable et aussi un coût limité (ces points peuvent être développés plus amplement).

On se limite ici, pour des raisons de brièveté, à la contrainte simple :

$$R_T = R_L + R_A \tag{10}$$

En choisissant R_A comme variable indépendante, il vient par dérivation à partir de l'équation (9) :

$$R_L^* = R_A^* = \frac{R_T}{2} \tag{11}$$

Il y a donc équipartition des résistances en parallèle, et le min de $\dot{Q}_{Tot}$ vaut :

$$\min \dot{Q}_{Tot} = \frac{4\Delta T_S}{R_T} \tag{12}$$

De la même façon, il est facile de montrer que les entropies produites dans chaque résistance sont égales (équipartition des productions d'entropie) et valent $\dot{S}_p{}^*$ comme :

$$\dot{S}_p{}^* = \frac{2\Delta T_S{}^2}{R_T T_{Se} T_{Si}} \tag{13}$$

3.3. Généralisation

Quelle que soit la grandeur physique G extensive transférée (surtout la matière et l'énergie), soumise à un gradient de potentiel ΔP de la variable conjuguée P (intensité), le modèle résistif linéarisé parallèle conduit à :

$$\dot{G}_{Tot} = \sum_i \dot{G}_i \tag{14}$$

avec i variant de 1 à N (N fini) et :

$$\dot{G}_i = \frac{\Delta P}{R_i} \text{ (condition de Dirichlet)} \tag{15}$$

La contrainte de dimension physique finie implique par ailleurs :

$$R_T = \sum_i R_i \tag{16}$$

L'optimisation consiste alors à rechercher la distribution optimale des R_i, fournissant le minimum de $\dot{G}_{Tot}$.

L'utilisation du calcul variationnel permet d'écrire le Lagrangien du système parallèle sous la forme :

$$L(R_i) = \Delta P \sum_i \frac{1}{R_i} + \lambda \left[\sum_i R_i - R_T \right] \tag{17}$$

Il y a donc (N – 1) degrés de liberté (variables indépendantes) satisfaisant à :

$$\frac{\partial L}{\partial R_i} = 0 = -\frac{\Delta P}{R_i{}^2} + \lambda \tag{18}$$

d'où :

$$R_i^* = \sqrt{\frac{\Delta P}{\lambda}}, \forall_i \tag{19}$$

ce qui est équivalent à l'équipartition des résistances de transfert.

La contrainte conduit à :

$$\sqrt{\lambda} = \frac{N\sqrt{\Delta P}}{R_T} \tag{20}$$

Au final :

$$\min \dot{G}_{Tot} = \frac{N^2 \cdot \Delta P}{R_T} \tag{21}$$

Le minimum de transfert advient lorsque R_T est maximum, et N minimum.

4. CONCLUSION – PERSPECTIVES

Tout ce qui a été abordé dans le présent article est fortement connecté à la loi constructale (et les théories associées). Selon A. Bejan [4], la loi constructale s'énonce de la façon suivante :

"For a finite size flow system to persist in time (to live) it must evolve in such a way that is provides easier and easier access to the currents that flow through it" (1996).

"Pour qu'un système à flux de dimensions finies perdure dans le temps, il doit évoluer de telle sorte qu'il assure un accès de plus en plus facile aux flots qui le traversent".

L'approche reste donc centrée sur l'optimisation des transferts (ou des transports) de tous types, y compris l'information.

Les transferts se font généralement de point à point (cas examiné ici), ou d'un point à une surface (et réciproquement), voire d'un point à un volume. Le lecteur pourra trouver des exemples dans de nombreux ouvrages de A. Bejan [4-7], mais aussi dans un ouvrage publié en France [8].

La flèche du temps apparaît dans l'évolution des configurations de transfert au sein du système : il y

a amélioration (supposée continue) et non pas une solution optimale, au sens mathématique du terme.

La description constructale rejoint la capacité d'évolution mise en évidence dans le monde vivant par C. Darwin [9].

Il reste maintenant à envisager ce que devient l'approche en Dimensions Physiques Finies en présence non seulement de transfert, mais aussi de conversion d'énergie. Ceci est l'objet d'autres recherches.

NOMENCLATURE

A	aire transversale, m^2
e	épaisseur
G	grandeur physique quelconque
L	Lagrangien
N	nombre de résistances thermiques
$\dot{Q}$	flux de chaleur, W
R	résistance thermique, m^2K/W
T	température, K

Symbole grecs

λ conductivité thermique, W/(mK)

Indices inférieurs

A	relative à une grandeur surfacique
eq	équivalent
i	relatif à l'élément i
L	relatif à une grandeur linéique
SE	système, extérieur
SI	système, intérieur
T, Tot	totale

REFERENCES

[1] Feidt M., *Thermodynamique et optimisation énergétique des systèmes et procédés*, TEC et DOC Lavoisier, Paris, France, 1987.

[2] Feidt M., *Thermodynamique Optimale en Dimensions Physiques Finies*, Lavoisier, Paris, France, 2013.

[3] De Vriendt A.B., *La transmission de la chaleur*, Vol.1 tome 1 et 2, 2eme edition, G.Morin éditeur, Chicoutimi, Québec, Canada, 1984.

[4] Bejan A., Constructal-theory network of conducting paths for cooling a heat generating volume, International Journal of Heat and Mass Transfer, **40**, 799-816, 1997.

[5] Bejan A., *Shape and Structure from Engineering to Nature*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.

[6] Bejan A., Zane J.P., *Design in Nature. How the Constructal Law Governs Evolution in Biology, Physics, Technology, and Social Organization*, Doubleday, New York, 2012.

[7] Bejan A., *The Physics of Life : The Evolution of Everything*, St. Martin's Press, New York, 2016.

[8] Queiros Conde D. et al, Constructal Theory and Multiscale Geometries, *Les Actes, Les Presses de l'ENSTA*, Paris, 2010.

[9] Darwin C., *L'origine des espèces* (au moyen de la sélection naturelle), Flammarion, Paris, France, 2008.