

INFLUENȚA POZIȚIEI REAZEMULUI INTERMEDIAR ASUPRA FRECVENȚELOR PROPRII ALE GRINZILOR CONTINUE

Student Adrain-Marian SPÎRTIC¹, Student Iliuță-Lavinus STRĂIN¹,
Student Natanael-Liviu BĂDELIȚĂ¹

¹ Universitatea Babeș-Bolyai, Facultatea de Inginerie, Cluj-Napoca, România

REZUMAT. Lucrarea prezintă calculul analitic al frecvențelor proprii pentru primele șase moduri de vibrație de încovolare pentru o grindă continuă simplu rezemată la care simpla rezemare ocupă diverse poziții pe lungimea grinzii. Rezultatele analitice sunt comparate cu rezultatele numerice obținute prin analiză modală utilizând două programe de modelare 3D: SolidWorks și Autodesk Inventor. Abaterile frecvențelor proprii obținute analitic și din analiza numerică modală, precum și evoluția frecvențelor proprii pentru nouă poziții ale reazemului intermediar sunt evidențiate în finalul lucrării.

Cuvinte cheie: frecvențe proprii, grinzi continue, reazem intermediar.

ABSTRACT. The paper presents the analytical calculation of the natural frequencies for the first six bending modes of vibration for a simply supported continuous beam where the simple support occupies various positions along the length of the beam. The analytical results are compared with the numerical results obtained by modal analysis using two 3D modeling programs: SolidWorks and Autodesk Inventor. The deviations of natural frequencies obtained analytically and from numerical modal analysis, as well as the evolution of natural frequencies for nine positions of the intermediate support are highlighted at the end of the paper.

Keywords: natural frequencies, continuous beams, intermediate support.

1. INTRODUCERE

Determinarea cu precizie a frecvențelor naturale este influențată semnificativ de poziționarea corectă a suporturilor, respectiv de alegerea corectă a condițiilor la limită [1]. De exemplu, calculul analitic pentru o grindă simplu rezemată presupune poziționarea reazemelor exact la capetele grinzii, dar în cazul real, poziționarea simplei rezemări este foarte aproape de capătul grinzii, ceea ce necesită tratarea problemei ca o grindă continuă cu două deschideri [2]. Studii complexe privind calculul frecvențelor naturale și formelor modale ale grinzilor continue sunt analizate în [3].

În lucrare, pentru o grindă simplu rezemată la care simpla rezemare este mobilă devine suport intermediar, iar din punctul de vedere al comportamentului dinamic și al analizei modale numerice, grinda devine continuă cu două deschideri. Calculul frecvențelor proprii ține cont de soluția analitică pentru obținerea valorilor proprii [4] și compararea acestor valori cu rezultatele obținute din analiza modală numerică prin metoda elementului finit.

2. ABORDARE ANALITICĂ

Pentru determinarea frecvențelor proprii se consideră o grindă simplu rezemată confecționată din oțel de secțiune rectangulară constantă având lățimea $b = 0,020$ mm și grosimea $h = 0,005$ mm. Lungimea grinzii este $L = 1$ m. Calitatea oțelului grinzii este S355JR cu modulul de elasticitate $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ N/m², densitatea $\rho = 7800$ kg/m³ și coeficientul Poisson $\nu = 0,28$ (valori extrase din biblioteca de materiale a programului de simulare numerică SolidWorks). Poziția simplei rezemări, notată cu a_i (fig. 1.1) are valorile conform tabel 1. Se notează cu $b_i = L - a_i = 1 - a_i$ lungimea consolei dintre punctele caracteristice 2 și 3. Asupra grinzii acționează greutatea proprie cu accelerația gravitațională $g = 9,81$ m/s².

Pentru obținerea frecvențelor proprii ale grinzii continue din fig. 1 pornim de la soluția generală a ecuației diferențiale de ordinul patru (1.1) a vibrațiilor transversale, libere și neamortizate.

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} + \frac{\rho A}{EI} \omega^2 W(x) = 0 \quad (1.1)$$

unde,

$A = b \cdot h$ [m²] reprezintă aria secțiunii transversale;

INFLUENȚA POZIȚIEI REAZEMULUI INTERMEDIAR ASUPRA FRECVENȚELOR PROPRII...

Tabelul 1. Poziția reazemului intermediar a_i , respectiv a consolei b_i

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_i [m]	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
b_i [m]	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1

$I = b \cdot h^3 / 12$ [m⁴] reprezintă momentul de inerție al secțiunii transversale;

$\square = f$ [rad/s] este pulsația proprie (f [Hz] este frecvența proprie);

$W(x)$ este funcția modală de undă.

Având în vedere că grinda continuă este compusă din două domenii (fig. 1), respectiv între punctele caracteristice 1 – 2 și 2 – 3, la scrierea soluției generale (2) a ecuației diferențiale (1) vom avea două variabile $x_1 \in [0, \dots, a_i]$, respectiv între punctele de reazem ale grinzii și $x_2 \in [0, \dots, b_i]$ pentru porțiunea liberă a grinzii.

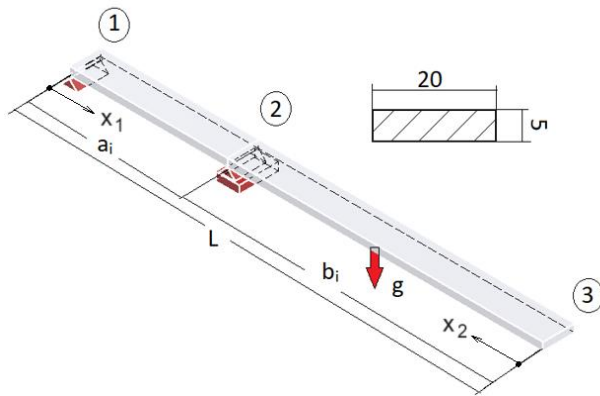


Fig. 1.1. Modelul grinzii continue cu două deschideri.

Având în vedere că grinda continuă este compusă din două domenii (fig. 1.1), respectiv între punctele caracteristice 1 – 2 și 2 – 3, la scrierea soluției generale (1.2) a ecuației diferențiale (1.1) vom avea două variabile $x_1 \in [0, \dots, a_i]$, respectiv între punctele de reazem ale grinzii și $x_2 \in [0, \dots, b_i]$ pentru porțiunea liberă a grinzii.

$$\begin{cases} W_1(x_1) = A_1 \sin(\alpha \cdot x_1) + B_1 \cos(\alpha \cdot x_1) + \\ + C_1 \sinh(\alpha \cdot x_1) + D_1 \cosh(\alpha \cdot x_1) \\ W_2(x_2) = A_2 \sin(\alpha \cdot x_2) + B_2 \cos(\alpha \cdot x_2) + \\ + C_2 \sinh(\alpha \cdot x_2) + D_2 \cosh(\alpha \cdot x_2) \end{cases} \quad (1.2)$$

unde, constantele de integrare: A_j , B_j , C_j și D_j ($j = 1, 2$) se determină din condițiile de contur specifice pentru fiecare punct caracteristic al grinzii, iar α reprezintă valoarea proprie modului de vibrație [5].

Din literatura de specialitate [6, 7] se cunoaște că prin derivarea funcției care ne dă săgeata obținem

rotirea, derivata de ordinul doi a săgeții este direct proporțională cu momentul încovoietor, iar derivata a treia a săgeții este direct proporțională cu forța tăietoare.

În articulația din punctul 1, unde $x_1 = 0$, săgeata (W_1) și momentul încovoietor (W_1'') au valoarea zero, în capătul liber din punctul 3, unde $x_2 = 0$ pentru funcția W_2 , momentul încovoietor și forța tăietoare (W_2'') sunt nule. Obținem sistemul (1.3):

$$\begin{cases} W_1(0) = 0 \\ W_1''(0) = 0 \\ W_2''(0) = 0 \\ W_2'''(0) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Pentru simpla rezemare din punctul 2 (fig. 1.1), ținând cont și de condițiile de continue a grinzii, putem scrie următoarele condiții limită (1.4):

$$\begin{cases} W_1(a_i) = 0 \\ W_2(b_i) = 0 \\ W_1''(a_i) = W_2''(b_i) \\ W_1'(a_i) = -W_2'(b_i) \end{cases} \quad (1.4)$$

Prin rezolvarea sistemelor (1.3) și (1.4) se obține ecuația caracteristică (5) a cărei soluții dau valorile proprii α_n pentru primele $n = 6$ moduri de vibrație de încovoiere.

$$Z_{12n} \cdot Z_{21n} + Z_{11n} \cdot Z_{22n} = 0 \quad (1.5)$$

unde,

$$\begin{cases} Z_{11n} = \cos(\alpha_n a_i) - \frac{\sin(\alpha_n a_i)}{\sinh(\alpha_n a_i)} \cosh(\alpha_n a_i) \\ Z_{12n} = 2 \sin(\alpha_n a_i) \\ Z_{21n} = 2 \frac{1 + \cos(\alpha_n a_i) \cosh(\alpha_n a_i)}{\cos(\alpha_n a_i) + \cosh(\alpha_n a_i)} \\ Z_{22n} = 2 \frac{[\sin(\alpha_n a_i) \cosh(\alpha_n a_i) - \cos(\alpha_n a_i) \sinh(\alpha_n a_i)]}{\cos(\alpha_n a_i) + \cosh(\alpha_n a_i)} \end{cases} \quad (1.6)$$

Având valorile proprii α_n se pot calcula frecvențele proprii cu relația (1.7).

$$f_n = \frac{\alpha_n^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot A \cdot L^4}} \quad (1.7)$$

Valorile proprii și frecvențele proprii pentru primele $n = 6$ moduri de vibrație sunt date în tabelul 2.

CERCETARE ȘI INOVARE ÎN INGINERIE MECANICĂ

Tabelul 2. Valori proprii α_n și frecvențe proprii f_n pentru $n = 6$ moduri de vibrație de încovoiere

a_i [m]	n	1	2	3	4	5	6
0,1	α_n	2,012461	5,056885	8,485728	11,90697	15,33733	18,77058
	f_n [Hz]	4,827438	30,48092	85,83019	168,9912	280,3892	419,9689
0,2	α_n	2,180143	5,538082	9,338492	13,08911	16,43453	18,32517
	f_n [Hz]	5,665418	36,55784	103,9478	204,2123	321,9412	400,2743
0,3	α_n	2,389706	6,166246	10,19879	12,12534	15,28647	19,42106
	f_n [Hz]	6,806923	45,32143	123,9821	175,2466	278,5327	449,5808
0,4	α_n	2,658637	6,894103	9,042906	12,47013	16,29669	18,1093
	f_n [Hz]	8,425194	56,65228	97,47156	185,3547	316,5633	390,8996
0,5	α_n	3,011831	6,826201	8,874549	13,08911	15,18549	19,37319
	f_n [Hz]	10,81242	55,54181	93,87596	204,2124	274,865	447,3673
0,6	α_n	3,467002	6,068954	10,14954	11,76292	16,17508	18,72189
	f_n [Hz]	14,32749	43,90253	122,7875	164,9270	311,8566	417,7929
0,7	α_n	3,885351	5,835217	9,544539	13,33338	15,01738	18,5895
	f_n [Hz]	17,99378	40,58596	108,5855	211,9057	268,8128	411,9051
0,8	α_n	3,823514	6,74046	8,957675	12,38883	16,10915	19,63455
	f_n [Hz]	17,42558	54,1553	95,64283	182,9458	309,3192	459,5192
0,9	α_n	3,48277	6,915324	10,20958	13,11153	15,54674	18,37113
	f_n [Hz]	14,45811	57,00158	124,2447	204,9127	288,0982	402,2849

3. ANALIZĂ MODALĂ NUMERICĂ

Pentru analiza modală numerică prin metoda elementului finit au fost utilizate programele SolidWorks (SW) și Autodesk Inventor (AI), Modelul virtual 3D a fost creat din două tronsoane, corespunzător punctelor 1-2 și 2-3 (fig. 1.1) Distanța dintre reazeme ai a fost aleasă ca parametru cu valori conform tabel 1, Analiza modală a fost realizată prin accesarea modului **Simulation**, cu calcularea primelor 15 frecvențe proprii prin utilizarea solver-ului **Direct sparse solver** în cazul programului SolidWorks.

Tronsoanele modelului 3D au fost tratate ca solid în cazul programului Autodesk Inventor și asimilate ca grinzi (**Treat as Beam**) în cazul programului SolidWorks, Pentru articulația din punctul 1 (fig. 1.1) am aplicat condiția ca aceasta să nu se deplaseze după trei direcții, iar pentru punctul 2, condiția ca deplasările după direcțiile y și z să fie zero, Prin aplicarea accelerației gravitaționale ca solicitare exterioară se simulează efectul greutatei proprii, Materialul aplicat grinzii este S355JR, ales din biblioteca programului.

Rezultatele obținute prin analiza numerică modală a frecvențelor proprii (f_{n_SW}, f_{n_AI}) și abaterile ($\epsilon_{SW}, \epsilon_{AI}$) față de valorile frecvențelor proprii rezultate din calculul analitic pot fi urmărite în tabelul 3.

4. CONCLUZII

Evoluția frecvențelor proprii pentru primele șase moduri de vibrație, funcție de poziția reazemului intermediar, pot fi urmărite în figurile 1.2 – 1.7.

Frecvențele proprii obținute analitic sunt calculate pentru 100 locații ale reazemului intermediar, cu pas de 0,01 (curba cu linie continuă) peste care sunt suprapuse valorile frecvențelor proprii obținute din analiza numerică modală utilizând programul SolidWorks (punctele cu cerc) și Autodesk Inventor (punctele cu asterisc).

Din analiza figurilor 1.2 – 1.7 se poate constata o foarte bună corelare a valorilor frecvențelor proprii obținute pe cale analitică cu valorile frecvențelor proprii din analiza numerică modală. Funcție de poziția reazemului intermediar, pentru fiecare mod de vibrație n există locații ale reazemului intermediar pentru care frecvențele proprii au valori maxime, respectiv valori minime. De exemplu, pentru modul 1 de vibrație (fig. 1.2) avem un maxim pentru poziția reazemului intermediar la aproximativ 0,7 m față de punctul de articulație al grinzii. Numărul de valori maxime ale frecvențelor proprii este egal cu numărul modului de vibrație n , iar pentru valorile minime ale frecvențelor proprii, acesta este egal cu numărul de moduri de vibrație minus unu, respectiv $n-1$.

Cum se poate observa din tabelul 3, abaterile frecvențelor proprii obținute din analiza numerică modală comparate cu frecvențele proprii calculate analitic sunt foarte mici (fig. 1.8 și 1.9) și sunt sub 1%, cu o singură excepție în cazul frecvenței de la modul 2 cu reazemul intermediar amplasat la 0,5 m față de articulație, în cazul analizei numerice din Autodesk Inventor când abaterea obținută are valoarea -1,383.

INFLUENȚA POZIȚIEI REAZEMULUI INTERMEDIAR ASUPRA FRECVENȚELOR PROPRII...

Tabelul 3. Frecvențe proprii f_n obținute din analiză numerică și abateri ε pentru $n = 6$ moduri de vibrație de încovoiere

a_i [m]	n	1	2	3	4	5	6
0,1	f_{n_SW} [Hz]	4,8269	30,459	85,686	168,47	279	416,95
	ε_{SW} [%]	0,011	0,072	0,168	0,308	0,495	0,719
	f_{n_AI} [Hz]	4,83	30,53	85,8	168,79	280,53	419,68
	ε_{AI} [%]	-0,053	-0,161	0,035	0,119	-0,050	0,069
0,2	f_{n_SW} [Hz]	5,6647	36,526	103,73	203,42	320,16	397,93
	ε_{SW} [%]	0,013	0,087	0,210	0,388	0,553	0,586
	f_{n_AI} [Hz]	5,67	36,56	103,85	204,09	324,07	403,04
	ε_{AI} [%]	-0,081	-0,006	0,094	0,060	-0,661	-0,691
0,3	f_{n_SW} [Hz]	6,8058	45,271	123,67	174,48	277,14	446,0
	ε_{SW} [%]	0,016	0,111	0,252	0,437	0,500	0,796
	f_{n_AI} [Hz]	6,82	45,35	123,75	175,38	278,23	449,21
	ε_{AI} [%]	-0,192	-0,063	0,187	-0,076	0,109	0,082
0,4	f_{n_SW} [Hz]	8,4235	56,573	97,333	184,68	314,95	388,36
	ε_{SW} [%]	0,020	0,140	0,142	0,364	0,510	0,650
	f_{n_AI} [Hz]	8,44	56,56	97,65	185,23	316,44	391,0
	ε_{AI} [%]	-0,176	0,163	-0,183	0,067	0,039	-0,026
0,5	f_{n_SW} [Hz]	10,809	55,49	93,685	203,55	273,47	444,27
	ε_{SW} [%]	0,032	0,093	0,203	0,324	0,508	0,692
	f_{n_AI} [Hz]	10,84	56,31	94,01	203,01	274,88	446,27
	ε_{AI} [%]	-0,255	-1,383	-0,143	0,589	-0,005	0,245
0,6	f_{n_SW} [Hz]	14,321	14,321	122,46	164,47	310,35	414,49
	ε_{SW} [%]	0,045	0,060	0,267	0,277	0,277	0,791
	f_{n_AI} [Hz]	14,36	43,98	122,5	165,09	312,55	417,46
	ε_{AI} [%]	-0,227	-0,176	0,234	-0,099	-0,222	0,080
0,7	f_{n_SW} [Hz]	17,984	40,559	108,41	211,02	267,46	409,42
	ε_{SW} [%]	0,054	0,066	0,162	0,418	0,503	0,603
	f_{n_AI} [Hz]	17,96	40,72	108,61	211,5	269,62	411,43
	ε_{AI} [%]	0,188	-0,330	-0,023	0,191	-0,300	0,115
0,8	f_{n_SW} [Hz]	17,419	54,082	95,503	182,47	307,88	455,85
	ε_{SW} [%]	0,038	0,135	0,146	0,260	0,465	0,798
	f_{n_AI} [Hz]	17,45	54,14	95,59	182,87	310,34	462,6
	ε_{AI} [%]	-0,140	0,028	0,055	0,041	-0,330	-0,670
0,9	f_{n_SW} [Hz]	14,454	56,941	123,94	204,03	286,63	399,9
	ε_{SW} [%]	0,028	0,106	0,245	0,431	0,510	0,593
	f_{n_AI} [Hz]	14,45	56,97	123,94	204,46	287,92	401,28
	ε_{AI} [%]	0,056	0,055	0,245	0,221	0,062	0,250

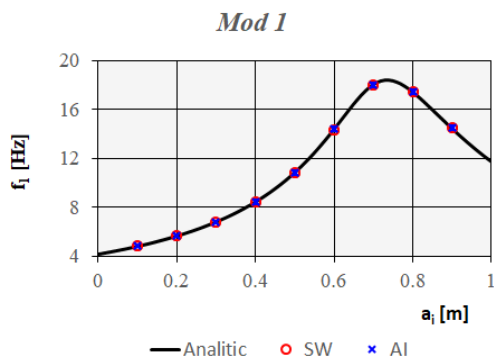


Fig. 1.2. Influența frecvențelor proprii pentru modul 1 de vibrație funcție de poziția reazemului intermediar.

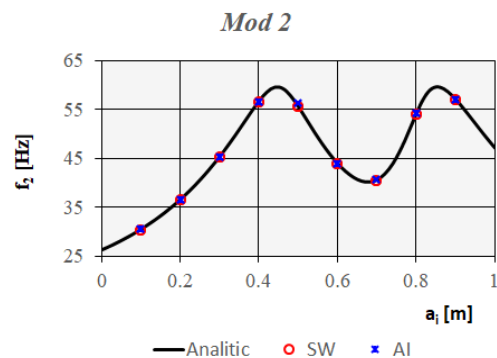


Fig. 1.3. Influența frecvențelor proprii pentru modul 2 de vibrație funcție de poziția reazemului intermediar.

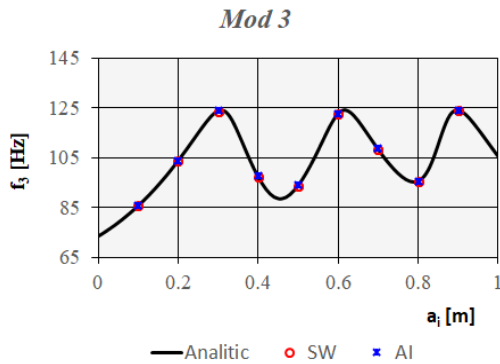


Fig. 1.4. Influența frecvențelor proprii pentru modul 3 de vibrație funcție de poziția reazemului intermediar.

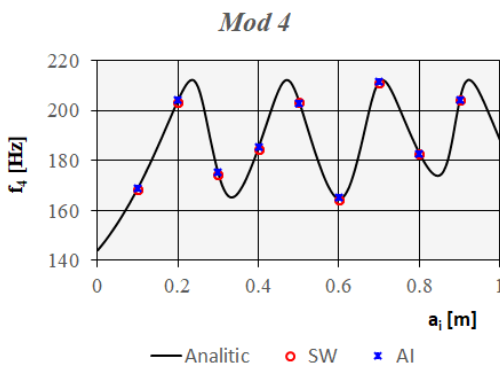


Fig. 1.5. Influența frecvențelor proprii pentru modul 4 de vibrație funcție de poziția reazemului intermediar.

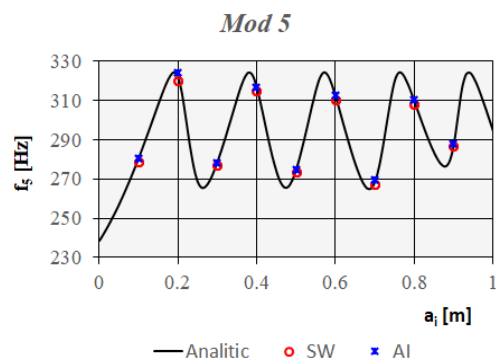


Fig. 1.6. Influența frecvențelor proprii pentru modul 5 de vibrație funcție de poziția reazemului intermediar.

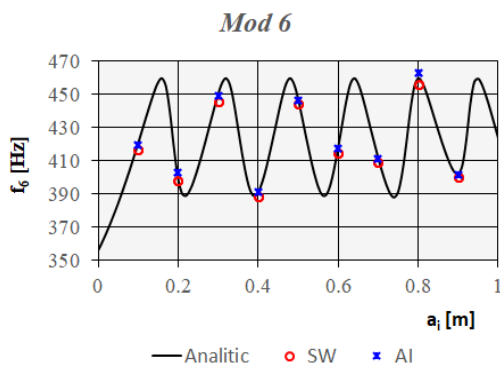


Fig. 1.7. Influența frecvențelor proprii pentru modul 6 de vibrație funcție de poziția reazemului intermediar.

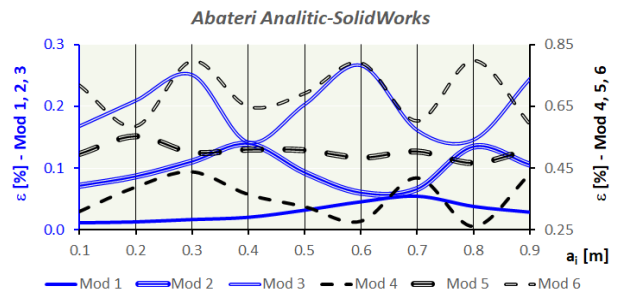


Fig. 1.8. Abateri frecvențe proprii din SolidWorks funcție de poziția reazemului intermediar pentru primele șase moduri de vibrație.

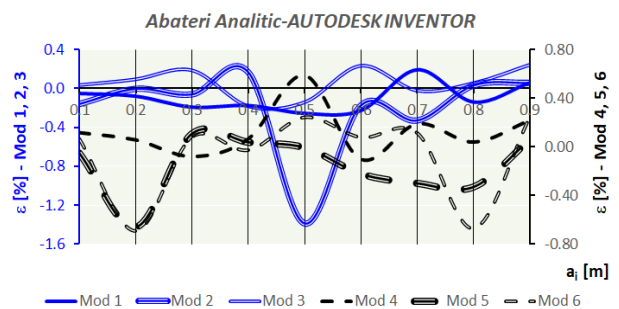


Fig. 1.9. Abateri frecvențe proprii din Autodesk Inventor funcție de poziția reazemului intermediar pentru primele șase moduri de vibrație.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Praisach Z.I., Ardeljan D., Pirșan D.A., Gillich G.R., *A new approach for imperfect boundary conditions on the dynamic behavior*, *Analecta Technica Szegedinensia*, Vol, 16, No, 01, ISSN 2064-7964, 2022, Szeged, Ungaria.
- [2] Singiresu S., R., *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons, Inc., ISBN: 978-0-471-77171-5, New Jersey, USA, 2007.
- [3] Ntakpe J.L., Praisach Z.I., Mitulețu C.I., Gillich G.R., Muntean F., „*Natural frequency changes of two span beams due to transverse crack*”, *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, Volume 5, Issue 3, pp, 229-238, 2017;
- [4] Gillich G.R., Negru I., Protocsil C., Stanciu E., Minda F., P., *Evaluarea integrității structurilor mecanice*, Ed, Eftimie Murgu, Reșița, 2018
- [5] Gillich G.R., Praisach Z.I., *Modal identification and damage detection in beam-like structures using the power spectrum and time-frequency analysis*, *Signal Processing*, Volume 96, Special Issue: SI, pp, 29-44, Part A, 2014.
- [6] Bejan M., Simion M., Cherecheș I.A., Lakatos G.D., Vidican I., *Compendii din rezistența materialelor*, Editura AGIR, Cluj-Napoca, 2013.
- [7] Pop M.V., Praisach Z.I., Gillich G.R., Păun L., *Deflection of a beam with transverse crack under dead load*, *Studia Universitatis Babeș-Bolyai, Engineering* 65(1), doi: 10.24193/subbeng,2020,1,16, pp, 145-152, 2020.

Despre autori

Student **Adrian-Marian SPÎRTIC**

Universitatea Babeș-Bolyai, Facultatea de Inginerie, Cluj-Napoca, România

Student anul IV, secția Inginerie Mecanică, Centrul Universitar Reșița.

Student **Iliuță-Lavinus STRĂIN**

Universitatea Babeș-Bolyai, Facultatea de Inginerie, Cluj-Napoca, România

Student anul IV, secția Inginerie Mecanică, Centrul Universitar Reșița.

Student **Natanael-Liviu BĂDELIȚĂ**

Universitatea Babeș-Bolyai, Facultatea de Inginerie, Cluj-Napoca, România

Student anul IV, secția Inginerie Mecanică, Centrul Universitar Reșița.