

# CUMULAREA EFECTELOR LA SOLICITAREA LA OBOSEALĂ CU MAI MULTE BLOCURI DE TENSIUNI

Valeriu V. JINESCU<sup>1</sup>, Vali-Ifigenia IORDĂCHESCU<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Membru titular al Academiei de Științe Tehnice din România

<sup>2</sup>Universitatea „Politehnica“ din București,

**Rezumat.** Lucrarea se referă la cumularea efectelor solicitării variabile ciclice a unei structuri mecanice, cu o succesiune de blocuri de tensiuni. Cele mai cunoscute relații propuse în literatură pentru acest caz de solicitare, sunt relații empirice, și se referă la materialele cu comportare liniar-elastică; ele nu iau în considerație influența tensiunii medii, a vitezei de solicitare și a deteriorărilor. În lucrare se propune o relație generală pentru cumularea efectelor solicitărilor cu blocuri de tensiuni ciclice, în cazul comportării neliniare a materialului structurii. Se consideră, de asemenea, influența tensiunii medii, viteza de solicitare, precum și deteriorările produse de fisuri, presolicitări, fluaj, vibrații, coroziune etc.

**Cuvinte cheie:** oboseală, cumularea efectelor, blocuri de tensiuni, deteriorare, tensiunea medie.

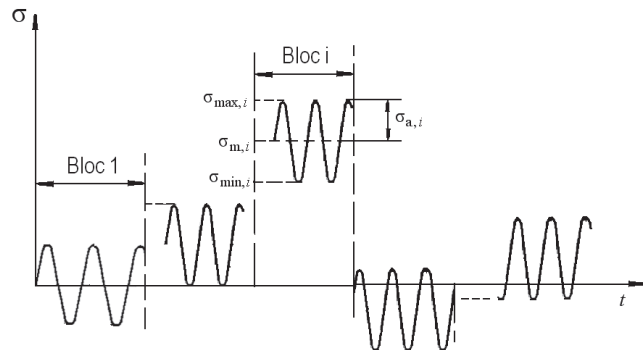
**Abstract.** The paper deals with effects cumulation in the case of a mechanical structure cyclic loaded with blocks of different stresses. The most known relationships proposed in literature for this loading case, are empirical, refers to linear-elastic behavior of the material; they do not take into account the influence of mean stress, of load rate and deteriorations.

In this paper one proposes a general relationship for the effects accumulation, due to cyclic loading with several blocks of normal stresses, in the case of nonlinear behavior of the structure material. One takes into account the influence of the mean stress, cyclic load rate, as well as the deteriorations due to cracks, pre-loadings, creep, vibrations, corrosion etc.

**Keywords:** fatigue, effects cumulation; blocks of stresses; deterioration; mean stress.

## 1. INTRODUCERE

Solicitarea unei structuri/piese cu o succesiune de blocuri de solicitări ciclice (fig. 1) determină o succesiune de deteriorări. Pentru suprapunerea efectelor acestor solicitări au fost propuse mai multe relații empirice (tabelul 1) bazate, în general (rel. 1 - 6), pe sumarea unor durate raportate, fără a se ține seama de comportarea diferită a materialelor sub și – respectiv – deasupra limitei de curgere.



**Fig. 1.** Solicitare variabilă cu mai multe blocuri de tensiuni normale.

Prima lege propusă a fost legea empirică Palmgren-Miner (1, tabelul 1) utilizată și astăzi [9], deși s-a constatat că are multe neajunsuri: nu conține influența tensiunii medii, a fisurilor, a tensiunilor remanente, a probabilității de rupere sau de supraviețuire. Ulterior au fost propuse legile (2) – (7) înscrise în tabelul 1.

Tabelul 1

## Legi de comportare în cazul solicitării variabile cu mai multe blocuri de tensiuni (fig. 1)

Nr. crt.	Legea pentru suprapunerea efectelor solicitărilor	Autorii	Observații
1.	$\sum_i \left( \frac{N}{N_{cr}} \right)_i = 1$ (1)	A. Palmgren (1924) și M.A. Miner (1945) [1;2]	$N_i$ – numărul efectiv al ciclurilor de solicitare cu amplitudinea tensiunii $\sigma_{a,i}$ , iar $N_{cr,i}$ – valoarea lui $N_i$ la rupere.
2.	$\sum_i \left( \frac{N}{N_{cr}} \right)_i^p = 1$ (2)	M.S. Marko și W.L. Starkey (1954) [3]	$p$ – exponent dependent de condițiile solicitării.
3.	$\sum_i \left( \frac{N}{N_{cr}} \right)_i^c = 1$ (3)	Palmgren – Miner modificată (1986) [4]	$c$ – exponent independent de solicitări.
4.	$\sum_i \left[ \left( \frac{N}{N_{cr}} \right)_i \cdot \left( \frac{\sigma_{a,i}}{\sigma_{a,max}} \right)^d \right] = 1$ (4)	J. Morrow (1968) [5]	$\sigma_{a,i}$ – amplitudinea tensiunii aplicate; $\sigma_{a,max}$ – amplitudinea maximă a tensiunii; $d$ – exponent de interacțiune; $N_{cr,i}$ – numărul de cicluri până la rupere sub acțiunea amplitudinii tensiunii $\sigma_{a,i}$ .
5.	$\sum_i \left( \frac{N}{N_{cr}} \right)_i + \frac{\Delta \varepsilon_{max} - \varepsilon_{pD}}{\varepsilon_f - \varepsilon_{pD}} = 1$ (5)	K. Tateishi, T. Hanji și K. Minami (2007) [6]	Se aplică dacă este îndeplinită condiția $\Delta \varepsilon_{max} > \varepsilon_{pD}$ ; $\Delta \varepsilon_{max}$ – variația maximă a deformației specifice; $\varepsilon_{pD}$ – deformația specifică la tracțiune, la deteriorare; $\varepsilon_f$ – deformația specifică la rupere prin solicitare statică.
6.	$\sum_i \left( \frac{N}{\bar{N}_{cr}} \right)_i = C$ (6)	T. Shimokava, S. Tanake (1984) [7]	$\bar{N}_{cr,i}$ – valoarea medie sau mediana în distribuția valorilor $N_{cr,i}$ ; $C$ – valoare statistică dependentă de distribuția amplitudinilor tensiunilor.
7.	$\sum_i \left( \frac{N}{N_{cr}} \right)_i^{\frac{\alpha+1}{m}} = 1$ (7)	V.V. Jinescu (2008) [8]	$\alpha = 1/k$ , unde $k$ provine din legea de comportare la solicitare monotonă ( $\sigma = M_\sigma \cdot \varepsilon^k$ ), în care $\varepsilon$ este deformația specifică sub acțiunea tensiunii $\sigma$ , iar $M_\sigma$ și $k$ sunt constante ale materialului); $m$ – provine din legea Basquin ( $\sigma_a^m \cdot N = \text{constant}$ , în care $\sigma_a$ este amplitudinea tensiunii).

Pentru a corecta aceste neajunsuri, în unele normative de proiectare [10; 11], membrul drept din relația (1) a fost înlocuit cu valori subunitare. În acest scop relația (1) a fost scrisă sub forma:

$$\sum_i \left( \frac{N}{N_{cr}} \right)_i = A, \quad (8)$$

unde  $A$  este o constantă subunitară. În normativul de proiectare PD 5500 [10], de exemplu, se prevede că

$$A = 0,6 \cdot \left( \frac{22}{s} \right)^{0,75}, \quad (9)$$

în care  $s$  este grosimea (în  $mm$ ) elementului solicitat la oboseală. Dacă  $s < 22$  mm se consideră  $s = 22$  mm, ceea ce face ca întotdeauna  $A \leq 0,6$ .

În normativul european EN-13445-3 [11], la calculul echipamentelor sub presiune fabricate prin sudare  $A = 0,8$  – pentru  $N_{ech} \in [500; 1000]$ ;  $0,5$  – pentru  $N_{ech} \in [1000; 10\,000]$  și  $0,3$  – pentru  $N_{ech} > 10000$ , unde  $N_{ech}$  – este numărul echivalent al ciclurilor de solicitare calculat conform acestui normativ.

Datorită abaterilor de la legea (1) au fost propuse și alte legi empirice, și anume: legea Marko - Starkey (2) și legea Palmgren - Miner modificată (3), în care s-a introdus un exponent diferit de unu, însă dificil de determinat și necorelat cu comportarea materialului. Morrow a propus relația (4) în care s-a introdus o corecție dependentă de amplitudinile tensiunilor și un exponent, denumit, de interacțiune.

Tateishi, Hanji și Minami au propus legea (5), care adusă la forma (8) arată că

$$A = 1 - \frac{\Delta \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{pD}}{\varepsilon_f - \varepsilon_{pD}} < 1.$$

Ulterior a fost propusă legea semiprobabilistică (6) care ține seamă de distribuția statistică a numărului ciclurilor de solicitare până la rupere prin valoarea medie  $\bar{N}_{cr,i}$ , dar și prin valoarea membrului drept  $C \neq 1$ . Deoarece modul de calcul a membrului drept nu este definit, relația poate fi aplicată doar considerând o valoare deterministă pentru  $C$ .

Legea (7) a fost dedusă teoretic și ține seama de comportarea materialului la solicitare monotonă ( $\alpha = 1/k$ ) și la solicitarea la oboseală ( $m$ ). Din aceasta, prin particularizări, rezultă legile (1) – (3), ceea ce conferă legii (7) un anumit grad de generalitate.

## 2. PROPUNEREA UNEI LEGI UNICE ÎN CAZUL SOLICITĂRII CU MAI MULTE BLOCURI DE TENSIUNI NORMALE

Toate neajunsurile semnalate la relațiile (1) – (6) au fost îndepărtate prin utilizarea legii (7) stabilită teoretic, în care  $m$  ia valorile  $m_1$ ,  $m_2$  sau  $m_3$  (fig. 2) în funcție de domeniul curbei de oboseală în care se face calculul. Ținând seama de împrăștierea statistică a caracteristicilor mecanice ale materialului, relația (7) obținută prin utilizarea principiului energiei critice din Energonică [8; 12] se scrie sub următoarea formă generală,

$$\sum_i \left( \frac{N}{N_{cr}} \right)_i^{\alpha+1} = C_D, \quad (10)$$

unde, la un moment dat  $t$ ,

$$C_D = P_{cr}(t) - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right)_f^{\alpha+1} \cdot \delta_{\sigma_m} - D_T(t). \quad (11)$$

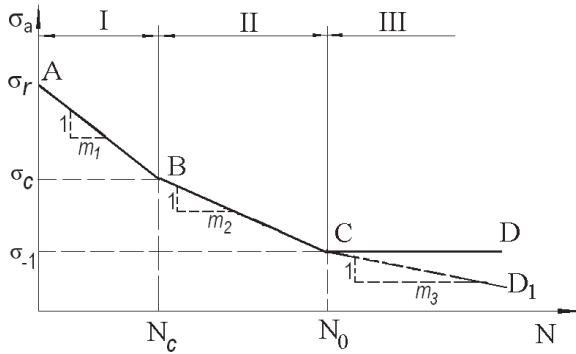


Fig. 2. Curba de oboseală (Wöhler), cu liniarizarea porțiunii AB.

În relațiile (10) și (11) valoarea exponentului  $\alpha$  depinde de viteza de sollicitare [8]. Participația critică are următoarea expresie,

$$P_{cr}(t) = P_{cr}(0) - D_T(t), \quad (12)$$

în care  $P_{cr}(0)$  este participația energiei specifice la  $t=0$ . Datorită distribuției statistice a valorilor caracteristicilor mecanice,  $P_{cr}(0) \in [P_{cr,\min}(0), P_{cr,\max}(0)]$ , unde  $P_{cr,\max}(0) \leq 1$ .

$D_T$  este deteriorarea totală, o mărime adimensională, cu valori cuprinse între zero și 1 [13], iar  $\delta_{\sigma_m} = 1$ , dacă  $\sigma_m > 0$  și  $\delta_{\sigma_m} = -1$ , dacă  $\sigma_m < 0$ .

Din cele ce preced rezultă,

$$C_D = P_{cr}(0) - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right)_f^{\alpha+1} \cdot \delta_{\sigma_m} - D_T(t), \quad (13)$$

în care  $(\sigma_m / \sigma_r)_f$  este valoarea acestui raport pentru ultimul din blocurile succesive de sollicitare (blocul final). Local trebuie îndeplinită condiția  $\sigma_m < \sigma_r$  (rezistența de rupere), iar fiecare bloc de sollicitare ( $i$ ) trebuie să îndeplinească condiția

$$\left( \frac{N}{N_{cr}} \right)_i^{\alpha+1} < C_i, \quad (14)$$

în care  $C_i = 1 - \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)_i^{\alpha+1} \cdot \delta_{\sigma_m} - D_{t,i}$ , unde  $D_{t,i}$  este deteriorarea totală până la finele acțiunii blocului  $i$  de sollicitare.

După ce sollicitarea cu blocul de tensiuni  $i$  s-a terminat, tensiunea medie corespunzătoare acestuia,  $\sigma_{m,i}$ , nu mai influențează durata de viață. Cu alte cuvinte, durata de viață este influențată de tensiunea medie a fiecărui bloc de sollicitare numai în cuprinsul aceluși bloc și nu are nici-o influență în afara acestuia.

În consecință, dacă este îndeplinită condiția (14) pentru fiecare bloc de tensiuni, durata de viață totală este influențată *numai de tensiunea medie a ultimului bloc de solicitare*, așa cum rezultă din relația (13). În cazul în care valorile caracteristicilor mecanice sunt valori deterministe,  $P_{cr}(0) = 1$ .

Deteriorarea totală  $D_T$  depinde de presolicitare, de fisuri și de acțiunea unor factori externi precum coroziunea, eroziunea, fluxul de neutroni, hidrogenul atomic etc.

Datorită structurii membrului drept (13) al legii (10) este posibil ca acesta să fie subunitar sau supraunitar ceea ce s-a constatat și experimental. În cazul relației de forma (8), de exemplu Miner [2] a găsit  $A = 0.61 \div 1.49$ , iar Buch [14] a evidențiat abateri mari față de relația (1); a indicat  $A = 0.1 \div 10$ .

Rezultă că, pentru suprapunerea efectelor unor blocuri de solicitări la oboseală, cel mai mare grad de generalitate îl are legea teoretică (10) care ține seama de comportarea (neliniară sau liniară) a materialului/structurii solicitate, de definirea deterministă sau probabilistică a caracteristicilor mecanice ale materialului, de tensiunea medie și de deteriorarea totală. Relația (13) pentru  $C_D$  poate fi completată cu considerarea influenței tensiunii remanente locale [16; 17].

### 3. DETERIORAREA TOTALĂ

În legea (10) aplicabilă solicitării la oboseală cu mai multe blocuri de tensiuni, influența altor acțiuni precum presolicitări, prezența fisurilor, coroziune, eroziune etc. se introduce în expresia participației critice și în consecință în expresia lui  $C_D$  (13) prin intermediul deteriorării totale  $D_T$ . În acest scop se recurge la principiul energiei critice [15;16], pe baza căruia deteriorarea totală poate fi scrisă ca sumă a deteriorărilor parțiale:

$$D_T = D(-t) + D(a) + D(t_f) + D(t_{cs}), \quad (15)$$

în care:  $D(-t)$  este deteriorarea produsă de presolicitarea anterioară momentului în care se face calculul;  $D(a)$  – deteriorarea produsă de fisura cu dimensiunea caracteristică  $a$ ;  $D(t_f)$  – deteriorarea produsă de solicitarea în condiții de fluaj, pe durata  $t$ ;  $D(t_{cs})$  – deteriorarea produsă de acțiunea corosivă pe durata  $t_{cs}$  [15]. Expresiile pentru deteriorările parțiale din relația (15) se obțin pe baza principiului energiei critice [8;15;16]. Câteva dintre acestea sunt înscrise în tabelul 2.

Relația pentru deteriorarea produsă de o fisură,  $D(a)$ , din tabelul 2, se referă la *solicitarea uniaxială* a unei epruvete cu fisura perpendiculară pe direcția tensiunii,  $\sigma$ .

În cazul *învelișurilor* se recurge la o altă relație. De exemplu, la solicitarea la presiunea interioară a unui înveliș de revoluție ( $\beta = R_2/R_1 < 1,2$ ) cu o fisură:

– *circumferențială* extinsă pe circumferință cu unghiul la centru  $2\theta$  (Fig. 3, a), deteriorarea totală se scrie sub forma,

$$D(a; \theta) = f_1(a) \cdot f_2(\theta), \quad (20)$$

în care  $f_1(a) \sim D(a)$ , iar  $f_2(\theta) \sim (\theta/\pi)$ ;

– *axială* de lungime  $2c$  (fig. 4, a), deteriorarea totală are o expresie similară,

$$D(a; c) = f_1(a) \cdot f_3(c), \quad (21)$$

în care  $f_3(c) \sim (c/\sqrt{R_m \cdot s})$ , unde  $R_m$  este raza circumferinței care trece prin mijlocul fisurii; deoarece grosimea învelișului este relativ mică, în general se consideră  $R_m = R_1 + 0,5s$ .

Tabelul 2

Relații pentru calculul deteriorării [7; 8; 15; 16]

Nr.	Cauza deteriorării	Relația deteriorării	Observații
1.	Solicitare prin vibrații	$D(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_{cr}}\right)^2$ (15)	$\omega$ – pulsația efectivă; $\omega_{cr}$ – pulsația critică.
2.	Coroziune uniformă	$D(t_{cs}) = \left(\frac{t}{t_{cs}}\right)^c$ (16)	$t$ – durata contactului cu substanța corozivă; $t_{cs}$ – durata până la corodare completă; $c$ – constanta de material.
3.	Solicitare ciclică	$D(-t) = D(\sigma_a; N) = \left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{\alpha+1}{m}}$ (17)	$m$ – exponent în legea Basquin; $\alpha = 1/k$ și $\sigma_a$ - amplitudinea tensiunii.
4.	Fluaj	$D(t_{fl}) = \left(\frac{t}{t_{fl}}\right)^{\frac{\alpha+1}{f}}$ (18)	$t$ – durata solicitării în condiții de fluaj; $t_{fl}$ – valoarea critică a lui $t$ ; $\alpha = 1/k$ ; $f$ – constantă dependentă de variația tensiunii de rupere în funcția de timp.
5.	Fisură	$D(a) = \left(\frac{a}{a_{cr}}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}$ (19)	$a$ – dimensiunea caracteristică a fisurii; $a_{cr}$ – valoarea critică a lui $a$ . $\alpha = 1/k$ .

Pentru țevi caracterizate prin  $R_m/s = 2; 3$  și  $5$  s-a determinat presiunea de rupere în funcție de dimensiunile fisurii cu secțiune dreptunghiulară, exprimate prin rapoartele adimensionale  $a/s$  și  $c/\sqrt{R_m \cdot s}$  [18].

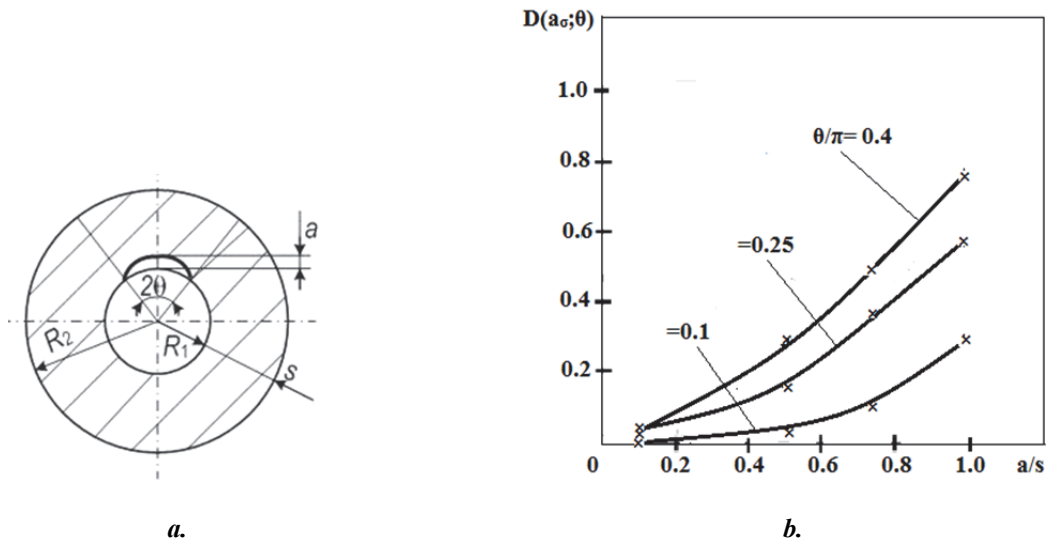
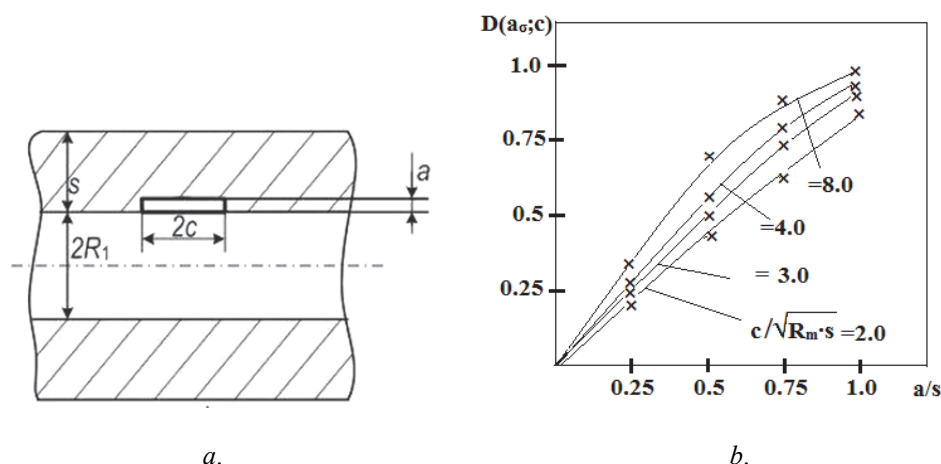


Fig. 3. Înveliș cilindric cu fisură circumferențială semieliptică la suprafața interioară (a); variația deteriorării totale pentru țevi din oțel cu fisuri semieliptice circumferențiale, la suprafața interioară, solicitate cu forță axială (b).



**Fig. 4.** Înveliș cilindric cu fisură axială dreptunghiulară, la suprafața interioară (*a*); variația deteriorării totale pentru țevi din oțel cu fisuri axiale dreptunghiulare, la suprafața interioară, solicitate la presiune interioară (*b*).

Presiunea de rupere se micșorează cu mărirea acestor rapoarte. Prin prelucrarea datelor experimentale din lucrarea [18] a rezultat variația deteriorării  $D(\sigma_a; N)$  reprezentată în figura 4, *b*.

Pentru țevile cu fisuri circumferențiale cu secțiunea semieliptică, solicitate la forță axială au fost obținute, prin prelucrarea datelor experimentale din lucrarea [19], valorile deteriorării  $D(\sigma_a; N)$  înscrise în figura 3, *b*.

Aceste deteriorări reprezintă termenul  $D_T(t)$  din relația (13) și ele pot fi utilizate în calculul numărului ciclurilor de solicitare până la rupere conform relației (10).

#### 4. CONCLUZII

Relația (10), în care membrul drept are expresia (13), împreună cu precizările de după relația (13), reprezintă *o lege generală unică*; ea permite calculul duratei de viață a unei structuri mecanice/piese solicitată la oboseală cu mai multe blocuri de tensiuni, cu considerarea influenței tensiunii medii, influenței probabilității de rupere, influenței fluajului, precum și a influențelor introduse de presolicitare, de prezența fisurilor, de coroziune/eroziune etc.

#### Bibliografie

- [1] Palmgren A., *Die lebensdauer von Kugellagern*. Zeitschr., 68, 1924, p. 339-410
- [2] Miner M.A., *Cumulative damage in fatigue*. J. Appl. Mech., 67, 1945, p. A159 – A164.
- [3] Marko S.M., Starkey W.L., *A concept of fatigue damage*. Trans. ASME, 76, 1954, p. 627-632.
- [4] Morrow J.D., *The effect of selected subcycle sequences in fatigue loading histories. Random fatigue life prediction*, ASME PVP., 72, 1986, 43-60.
- [5] Tateishi K., Hanji T., Minami K., *A prediction model for extremely low cycle fatigue strength of structural steel*. Int.J. Fatigue, 29, 2007, p. 887-896.
- [6] Shimokawa T., Tanake S., *A statistical consideration of Miner's rule*, Int. J. Fatigue, 2(4), 1980, p. 165-170.
- [7] Jinescu V.V., *Calculus of Mechanical Structures Lifetime*, Conference Excellence Research – A way to innovation, vol. II, Brașov, Editura Tehnică, 2008, p. 222.1-222.6.

- 
- [8] Jinescu V.V., *Principiul energiei critice și aplicațiile sale*, București, Editura Academiei Române, 2005.
- [9] ASME, Boiler and Pressure Vessel Code, Section VIII, Division 2, 2010.
- [10] British Standard BS, PD 5500, 2009.
- [11] Euronorme EN 13 445 – 3. Unfired Pressure Vessels – Part 3. Design, 2009.
- [12] Jinescu V.V., *Energonica*, Editura Semne, București, 1997.
- [13] Kachanov L.M., *Time of the Rupture Process under Creep Conditions*, Izvestia Akademii Nauk SSR (Otdelenie Techniceskih Nauk), 8, 1958, p. 26 – 31.
- [14] Buch A., *Fatigue strength calculation*, Trans. Tech Publications, Switzerland, 1988.
- [15] Jinescu V.V., *Cumulation of effects in calculating the deterioration of fatigue loaded structures*, Int. J. Damage Mech., 21, 2012.
- [16] Jinescu V.V., *Tratat de Termodinamică*, București, Editura AGIR, 2011.
- [17] Jinescu V.V., *Critical Energy Approach for the Fatigue life Calculation under Blocks with different normal Stress Amplitudes*, Int. J. Mechanical Sci., 2013, dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci. 2012.12.009.
- [18] Nak-Hyum Kim, Chang-Sik Oh, Yun-Jae Kim, Jong-Sung Kim, Dong Wook Jerng, Peter J. Budden, *Limit loads and fracture mechanics parameters for thick-walled pipes*, Int J Pressure Vess and Piping, 88, 2011, p. 403-414.
- [19] Yun-Jae Kim, Do-Jun Shim, Kamran Nikbin, Young-Jin Kim, Seong-Sik Hwan, Joung-Soo Kim, *Finite element based plastic limit loads for cylinders with part-through surface cracks under combined loading*, Int J Pressure Vess and Piping, 80, 2003, p. 527-540.