ALGORITM LOCAL PENTRU OPTIMIZAREA COSTULUI REȚELELOR ARBORESCENTE DE CONDUCTE

Vlad ENACHE[1], Stoian PETRESCU[2]
[1] Universitatea „Politehnica" – București
[2] Membru de onoare al Academiei de Științe Tehnice din România

Rezumat. Minimizarea costului conductelor ce distribuie un fluid generic printr-o rețea arborescentă către niște consumatori cu anumite cerințe de debit, cu păstrarea constantă a puterii disipate în rețea, respectă două legi generale: raportul cost/putere disipată ajunge să fie același pentru toate conductele; în orice nod, construind pe direcțiile conductelor vectori de lungimi egale cu o anumită putere a debitelor, acești vectori își fac echilibru. Configurația obținută este optimă și sub alt aspect: dintre toate rețelele cu același cost, aceasta disipă putere minimă. Bazându-ne pe aceste rezultate, propunem un algoritm local de optimizare, care ar putea sta la baza minimizării costului unor rețele biologice (de vase de sânge, de vase capilare etc.).

Cuvinte cheie: minimizarea costului conductelor, rețea arborescentă de conducte, algoritm local de optimizare, minimizarea costului unor rețele biologice.

Abstract. Minimizing the cost of tree-like pipe networks at constant dissipated power follows two general laws: the „cost per dissipated watt" ratio is the same for all pipes; in each node, defining along the pipes vectors equal to a certain power of the flow, they are in equilibrium. The resulting configuration is also optimal in another sense: among all the networks with the same cost, this has minimum power dissipation. Based on these results, we propose a local optimization algorithm which may be responsible for how biological networks (of blood vessels, capillary vessels etc.) minimize their cost.

Keywords: minimizing the cost of pipes, tree-like pipe network, local optimization algorithm, minimizing the cost of biological networks.

PROBLEMA

Considerăm o rețea arborescentă de conducte drepte care distribuie un fluid incompresibil generic (apă, curent electric, căldură etc.) de la o sursă la mai mulți consumatori fixați în spațiu. Debitele cerute de consumatori sunt date. În primă aproximație considerăm că presiunile la sursă și la consumatori nu sunt fixate, ci sunt libere să ia orice valori.

Studiem următoarea problemă: dată fiind o anume pierdere de putere în rețea, care este rețeaua de cost minim? Concret, trebuie să determinăm secțiunile conductelor și pozițiile nodurilor libere (adică geometria, desenul rețelei) astfel încât suma pierderilor de putere pe toate conductele să aibă o valoare dată, iar costul total al conductelor să fie minim.

Costul

Fiecare conductă are un cost C, pe care-l considerăm proporțional cu lungimea conductei L, cu o putere a a debitului q și cu o putere b a secțiunii S:

$$C = K_c L q^a S^b \tag{1}$$

De exemplu, dacă ceea ce costă este cămaşa conductei, atunci costul este proporţional cu lungimea L şi cu radicalul secţiunii S, deci b = ½. Când costul este dat de volumul de fluid din conductă, el este proporţional cu L şi cu S, deci b = 1. Când costul este dat de efortul de săpare a unui şanţ în teren stâncos şi depinde nesemnificativ de secţiunea conductei instalate, avem b = 0. În aceste exemple debitul nu influenţează costul, deci a = 0. Dar este posibil ca debitul să intervină atunci când costul reflectă nişte activităţi de mentenanţă – de exemplu întreţinerea unei şosele, care depinde de intensitatea traficului; sau costul de încălzire/răcire a unei conducte, care depinde de debitul ce trece prin ea.

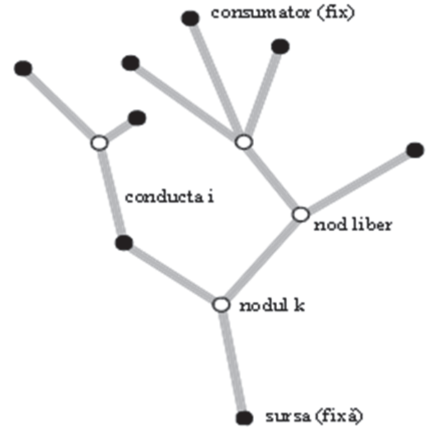

Fig. 1 – Reţea arborescentă de conducte.

Pierderea de putere

Pierderea de putere P într-o conductă o considerăm proporţională cu lungimea L, cu o putere A a debitului q şi cu o putere B a secţiunii S:

$$P = K_w L q^A S^B \tag{2}$$

De exemplu, pentru curent electric avem (din legea lui Ohm şi legea lui Pouillet):

$$P = UI = RI^2 = \left(\rho \frac{L}{S}\right) I^2 = \rho L I^2 S^{-1}, \tag{3}$$

deci A = 2 şi B = – 1. Pentru curgere turbulentă avem (din ecuaţia Darcy-Weisbach):

$$P = q\Delta p = q\left(f_D \frac{L}{d}\frac{\rho v^2}{2}\right) = f_D \frac{\rho}{2} L q^3 S^{5/2}, \tag{4}$$

deci A = 3 şi B = – 5/2. Pentru curgere laminară avem (din Ecuaţia Hagen-Poiseuille):

$$P = q\Delta p = q\left[\frac{8\mu L q}{\pi (d/2)^4}\right] = 8\pi\mu L q^2 S^{-2}, \tag{5}$$

deci A = 2 şi B = – 2. În general se poate arăta că şi pentru transferul de căldură sau pentru alte fenomene de transport se obţin relaţii similare.

În tabelul 1 sunt sintetizate câteva dintre fenomenele care pot fi studiate cu aceste formule.

Tabelul 1

Valorile parametrilor *a, b, A* şi *B* pentru diverse combinaţii de fenomene şi cerinţe

	Costă metrul de conductă instalată	**Costă metrul pătrat de cămaşă a conductei**	**Costă metrul cub de volum din conductă**
Curent electric	$a = 0$, $b = 0$, $A = 2$, $B = -1$	$a = 0$, b = ½, $A = 2$, $B = -1$	$a = 0$, $b = 1$, $A = 2$, $B = -1$
Curgere laminară	$a = 0$, $b = 0$, $A = 2$, $B = -2$	$a = 0$, b = ½ , $A = 2$, $B = -2$	$a = 0$, $b = 1$, $A = 2$, $B = -2$
Curgere turbulentă	$a = 0$, $b = 0$, $A = 3$, $B = -5/2$	$a = 0$, b = ½, $A = 3$, $B = -5/2$	$a = 0$, $b = 1$, $A = 3$, $B = -5/2$

Definiții

Dintre mărimile asociate conductelor, pentru acelea care depind liniar de lungime definim versiunea lor *unitară*.

Costul unitar:

$$C = cL, \quad c = \frac{C}{L} = K_c q^a S^b \tag{6}$$

Pierderea unitară de putere:

$$P = wL, \quad w = \frac{P}{L} = K_w q^A S^B \tag{7}$$

Acestea sunt mărimi scalare. Considerând versorul unei conducte îndreptat în sensul curgerii, asociem fiecărei conducte *mărimi unitare vectoriale*. De exemplu în Figura 2 este reprezentat *costul unitar vectorial*:

$$\vec{c} = c\vec{1} \tag{8}$$

Fig. 2 – Costul unitar vectorial.

Raportând mărimea ce trebuie optimizată la mărimea ce trebuie menținută constantă, definim *costul per watt* al unei conducte:

$$\beta = \frac{C}{P} = \frac{cL}{wL} = \frac{c}{w} \tag{9}$$

Pentru un nod, conducta ce aduce debit o numim *conducta de alimentare*. Conductele care consumă debit din nod se numesc *conductele consumatoare* ale nodului. Dat fiind indicele k al nodului, numerotăm aceste conducte cu indicii $ik0$, $ik1$, …, ikj, … (primul indice $j = 0$ corespunde conductei de alimentare, iar ceilalți indici corespund conductelor consumatoare).

Pentru o mărime oarecare x caracteristică conductelor, într-un nod definim *dezechilibrul de x* ca fiind suma x-ilor conductelor, luând cu semnul minus x al conductei de alimentare şi cu semnul plus x al conductelor consumatoare:

$$T_k(x) = -x_{ik0} + \sum_{j>0} x_{ikj} \tag{10}$$

Definiția este valabilă şi pentru mărimi vectoriale. De exemplu, *dezechilibrul costului unitar vectorial* este:

$$T_k(\vec{c}) = -\vec{c}_{ik0} + \sum_{j>0} \vec{c}_{ikj} \tag{11}$$

Spunem că mărimea *x se conservă într-un nod* dacă dezechilibrul lui x este nul în nod:

$$T_k(x) = -x_{ik0} + \sum_{j>0} x_{ikj} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{ik0} = \sum_{j>0} x_{ikj} \tag{12}$$

Altfel spus, mărimea x se conservă într-un nod dacă x-ul conductei de alimentare egalează x-ul însumat al conductelor consumatoare.

Legătura între cost şi pierderea de putere

Eliminăm secțiunea S între expresiile costului unitar (6) şi pierderii unitare de presiune (7):

$$c = \left(K_c K_w^{-\frac{b}{B}} \right) q^{\frac{aB-Ab}{B}} w^{\frac{b}{B}} \quad \Rightarrow \quad c \propto w^{\frac{b}{B}} \tag{13}$$

Rezultă că:

$$\frac{\partial c}{\partial w} = \left(\frac{b}{B} \right) \frac{c}{w} = \frac{b}{B} \beta \tag{14}$$

Această relație o numim *legătura între cost şi pierderea de putere*. Pentru o conductă de lungime dată, ea exprimă proporționalitatea dintre costul conductei şi pierderea de putere ridicată la *b/B*. De fapt, dat fiind că de obicei B este negativ, relația este de inversă proporționalitate: pentru a diminua pierderea de putere, costul trebuie să crească; şi invers: putem micşora costul doar prin creşterea pierderii de putere pe conductă.

ECUAȚII

Considerăm o rețea formată din N conducte, numerotate de la 1 la N. Ecuațiile sunt:
Proporționalitatea cu lungimea a costului şi a pierderii de presiune pe o conductă:

$$C_i = c_i L_i \tag{15}$$

$$P_i = w_i L_i \tag{16}$$

Legătura între cost şi curgere:

$$\frac{\partial c_i}{\partial w_i} = \frac{b}{B} \beta_i \tag{17}$$

Costul total al rețelei:

$$C_{total} = \sum_{i=1}^{N} C_i = \min. \tag{18}$$

Pierderea totală de putere în rețea:

$$P_{total} = \sum_{i=1}^{N} P_i = \text{const.} \tag{19}$$

OPTIMIZAREA TEORETICĂ

Pentru a minimiza costul la pierderi de putere constante vom aplica metoda multiplicatorilor Lagrange. Alcătuim funcția Lagrange corespunzătoare problemei:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} c_i L_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^{N} w_i L_i - P_{total} \right) \tag{20}$$

Funcția are ca variabile pierderile unitare de presiune w_i ale conductelor (din care se pot calcula apoi secțiunile) şi pozițiile nodurilor $\vec{r}_k$.

Pierderile unitare de presiune pe conducte

Mai întâi anulăm derivatele parțiale în raport cu w_i. Folosind legătura între cost şi pierderea de putere, deducem imediat că:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial w_i} = L_i \frac{\partial c_i}{\partial w_i} - \lambda L_i = L_i \frac{b}{B}\frac{c_i}{w_i} - \lambda L_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_i = \lambda \frac{B}{b} \tag{21}$$

În rețeaua optimă toate conductele au acelaşi cost per watt.
Numim această relație **condiția conservării costului per watt**.

Pozițiile nodurilor

Dacă vectorul de poziție $\vec{r}_k$ al unui nod se modifică, sunt influențate doar lungimile conductelor *ikj* care se întâlnesc în nod.

Variația funcției Lagrange în raport cu poziția $\vec{r}_k$ a nodului k o exprimăm cu ajutorul operatorului nabla, ce surprinde derivatele parțiale în raport cu toate direcțiile spațiale:

$$\nabla_{\vec{r}_k} \Psi = \sum_j c_{ikj}\left(\nabla_{\vec{r}_k} L_{ikj}\right) - \lambda \sum_j w_{ikj}\left(\nabla_{\vec{r}_k} L_{ikj}\right) = \vec{0} \tag{22}$$

Schimbăm semnul în ambii membri şi folosim conservarea costului per watt (21):

$$\left(1 - \frac{b}{B}\right)\sum_j c_{ikj}\left(-\nabla_{\vec{r}_k} L_{ikj}\right) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_j c_{ikj}\left(-\nabla_{\vec{r}_k} L_{ikj}\right) = \vec{0} \tag{23}$$

Conservarea costului unitar vectorial

Gradienții lungimilor conductelor (în raport cu vectorul de poziție $\vec{r}_k$ al nodului în care se întâlnesc) sunt chiar versorii conductelor, construiți convergent înspre nod. Aceşti versori înmulțiți cu costurile unitare sunt costurile unitare vectoriale. În egalitatea (23) recunoaştem dezechilibrul costului unitar vectorial şi astfel obținem **condiția de conservare a costului unitar vectorial**, valabilă în nodurile libere (neconsumatoare):

$$T_k(\vec{c}) = -\vec{c}_{ik0} + \sum_{j>0} \vec{c}_{ikj} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{c}_{ik0} = \sum_{j>0} \vec{c}_{ikj} \tag{24}$$

În rețeaua optimizată, costul unitar vectorial se conservă în fiecare nod liber: suma costurilor unitare vectoriale (considerate divergent din nod) este nulă. (Sau: costul unitar vectorial al conductei de alimentare este egal cu suma costurilor unitare vectoriale ale conductelor consumatoare.)

FUNCȚIA CARACTERISTICĂ Φ

Definim *funcția caracteristică a rețelei* Φ:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} L_i q_i^n, \tag{25}$$

unde
$$n = \frac{aB - Ab}{B - b} \tag{26}$$

Mai notăm
$$K = \left(\lambda \frac{B}{b} \frac{K_w}{K_c} \right)^{\frac{1}{b-B}} \tag{27}$$

pentru a scrie costul total şi pierderea totală de putere în reţeaua optimă sub forma:
$$C_{total} = K_c K^b \Phi \tag{28}$$
$$P_{total} = K_w K^B \Phi \tag{29}$$

Condiţia de anulare a gradientului funcţiei Lagrange (23) se poate şi ea exprima cu ajutorul funcţiei caracteristice:
$$\nabla_{\vec{r}_k} \Phi = \vec{0} \tag{30}$$

Aceasta înseamnă că **geometria reţelei optime este aceea în care funcţia caracteristică Φ îşi atinge minimul.**

Din condiţia costului per watt (21) rezultă că:
$$S_i = K q_i^{-\frac{a-A}{b-B}} \tag{31}$$

Deci **în reţeaua optimă secţiunea fiecărei conducte trebuie să fie proporţională cu debitul ce trece prin ea ridicat la o anumită putere.**

Remarcă: Toate rezultatele deduse în capitolele „Optimizarea” şi „Funcţia caracteristică Φ” se referă numai la reţeaua optimizată. Ele nu sunt valabile într-o reţea oarecare.

OPTIMIZAREA PRACTICĂ

Consideraţiile de până acum nu rezolvă complet problema determinării reţelei optime. Motivul este că multiplicatorul Lagrange necunoscut λ a rămas ascuns în expresia (27) a constantei K, necesară pentru aflarea secţiunilor conductelor. Constanta K se poate determina astfel:

– Mai întâi minimizăm funcţia caracteristică Φ deplasând nodurile libere până satisfac toate condiţia (30), ce nu depinde de secţiunile conductelor; în felul acesta determinăm geometria reţelei optime, obţinând poziţiile nodurilor libere.

– Cu poziţiile nodurilor cunoscute, putem determina lungimile L_i ale conductelor; ştiind lungimile, calculăm valoarea funcţiei caracteristice Φ.

– În continuare constanta K rezultă din formula (29) a pierderii totale de putere în reţea, care este cunoscută:
$$P_{total} = K_w K^B \Phi \quad \Rightarrow \quad K = \left(\frac{P_{total}}{K_w \Phi} \right)^{\frac{1}{B}} \tag{32}$$

– În fine, ştiind valoarea lui K putem determina secţiunile conductelor cu relaţia (31).

Practic nu trebuie să aşteptăm până obţinem poziţiile finale ale nodurilor libere, ci putem ajusta secţiunile în paralel cu deplasarea nodurilor.

Deplasarea nodurilor

După cum am văzut, problema este echivalentă cu minimizarea funcției caracteristice Φ, care depinde doar de debitele conductelor (ce sunt cunoscute pentru o topologie dată) şi de pozițiile nodurilor libere. Scriem diferențiala funcției caracteristice:

$$d\Phi = \sum_k \left(\nabla_{\vec r_k}\Phi\right) d\vec r_k = \sum_k \left[\sum_j q_{ikj}^n \left(\nabla_{\vec r_k} L_{ikj}\right)\right] d\vec r_k \tag{33}$$

Pentru a minimiza funcția Φ prin mici ajustări progresive, vom merge cu deplasările $d\vec r_k$ ale nodurilor în sens invers gradientului funcției:

$$d\vec r_k = -K_r \left[\sum_j q_{ikj}^n \left(\nabla_{\vec r_k} L_{ikj}\right)\right] ds \tag{34}$$

Constanta de proporționalitate K_r reglează viteza de convergență, iar ds este un pas infinitezimal.

Mutând semnul minus în fața gradientului lungimii, obținem exact dezechilibrul vectorial al mărimii q^n:

$$d\vec r_k = K_r \left[\sum_j q_{ikj}^n \left(-\nabla_{\vec r_k} L_{ikj}\right)\right] ds = K_r \left[-q_{ik0}^n \vec 1_{ik0} + \sum_{j>0} q_{ikj}^n \vec 1_{ikj}\right] ds = \\ = K_r T_k(\vec q^{\,n}) ds \tag{35}$$

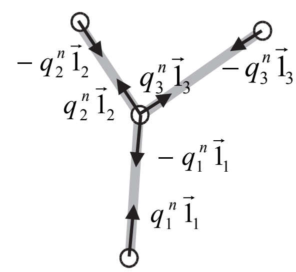

Fig. 3 – Vectorii ce compun dezechilibrul vectorial al mărimii q^n.

Deci micile deplasări ale nodurilor libere trebuie să fie proporționale cu $T_k(\vec q^{\,n})$. Atunci când dezechilibrul vectorial T_k al mărimii q^n devine nul, deplasarea $d\vec r_k$ se anulează şi nodul nu se mai mişcă. Condiția finală de echilibru în care se stabilizează rețeaua este deci caracterizată pentru fiecare nod liber de:

$$T_k(\vec q^{\,n}) = -q_{ik0}^n \vec 1_{ik0} + \sum_{j>0} q_{ikj}^n \vec 1_{ikj} = \vec 0 \tag{36}$$

Dezechilibrul vectorial T_k al mărimii q^n se obține însumând vectorii de lungime q^n construiți divergent din nod pe direcțiile conductelor, după cum se vede în Figura 3.

Contracția conductelor

Fiecare conductă se comportă ca şi cum ar avea o tendință de contracție longitudinală, trăgând de nodurile din capete cu forțe egale şi de sens opus. Mărimea forței de contracție a unei conducte este puterea n a debitului ce trece prin ea.

Problema se reduce la găsirea poziției de echilibru a unei rețele de conducte ce prezintă aceste tendințe de contracție. Funcția caracteristică Φ reprezintă energia totală a sistemului, care trebuie minimizată.

Secțiunile conductelor sunt proporționale cu debitul ridicat la o putere constantă, coeficientul de proporționalitate depinzând de valoarea funcției caracteristice:

$$S_i = \left(\frac{P_{total}}{K_w \Phi}\right)^{\frac{1}{B}} q_i^{-\frac{a-A}{b-B}} \tag{37}$$

Algoritmul

Pornind de la o topografie oarecare a rețelei, determinăm mai întâi debitele pe conducte (prin însumarea debitelor pornind de la consumatori înspre sursă). Aceste debite vor rămâne neschimbate. Apoi executăm următorii paşi în mod repetat:

1. Pentru fiecare conductă i determinăm versorul $\vec{1}_i$, calculăm q_i^n şi obținem vectorul $\vec{1}_i q_i^n$.
2. În fiecare nod k însumăm vectorii cu care contribuie conductele ce se întâlnesc în nod, obținând dezechilibrul vectorial T_k al lui q^n.
3. În fiecare nod k înmulțim vectorul obținut la pasul 2 cu o constantă $K_t ds$, ce reprezintă mărimea pasului pentru deplasarea nodurilor; rezultatul este deplasarea nodului $d\vec{r}_k$.
4. Mutăm fiecare nod cu $d\vec{r}_k$ calculat la pasul 3.
5. Calculăm funcția caracteristică Φ însumând produsele $L_i q_i^n$ pentru toate conductele.
6. Cu formula (37) determinăm secțiunile conductelor.

REZULTATE

Implementând în limbajul de programare Java algoritmul descris, am obținut rezultate de genul celor din figura 4.

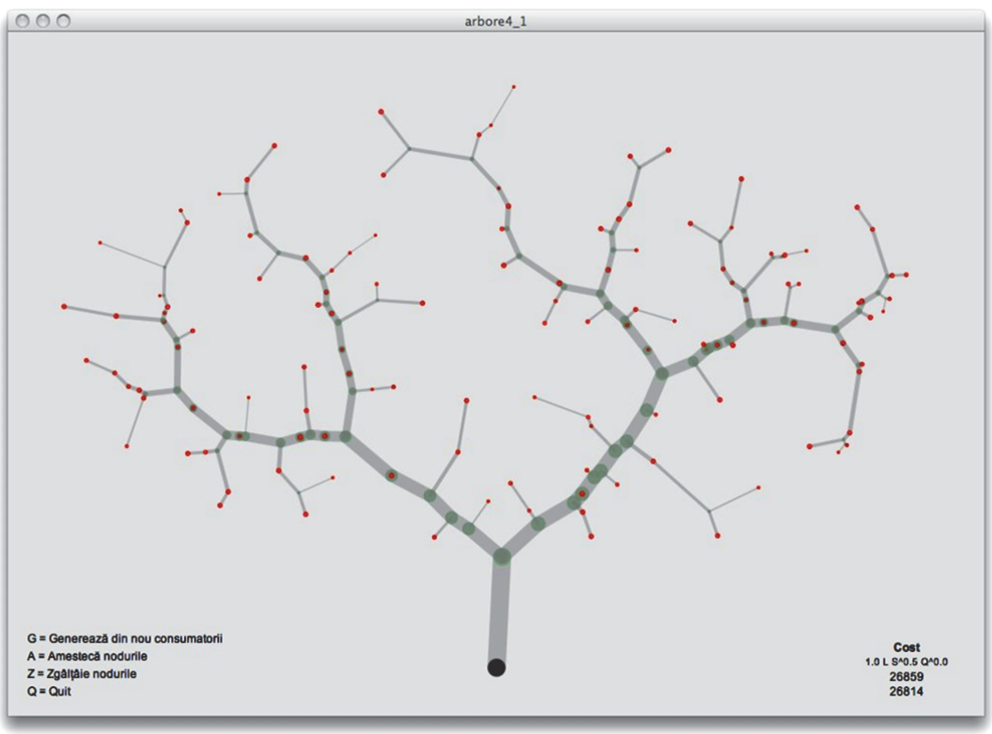

Fig. 4 – Un arbore optimizat: $a = 0$, $b = ½$ (costul dat de cămaşa conductelor) şi $A = 2$, $B = –2$ (curgere laminară).

Cei aproximativ 150 de consumatori au fost distribuiți aleatoriu în interiorul unei elipse, cu debite alocate aleatoriu în intervalul [1,20]. Programul permite alegerea parametrilor *a, b, A* şi *B*. Constantele K_c şi K_w au fost alese unitare.

Rularea programului arată că interacțiunea dintre conducte nu conduce direct la găsirea unui optim global, ci sistemul se blochează la început într-un optim local ce prezintă conducte încrucişate – o soluție evident sub-optimală. Dar aplicarea unor perturbații de poziție („zgâlțâirea” arborelui) scoate sistemul din optimul local şi astfel se poate atinge, dacă nu optimul global, cel puțin o stare în care conductele nu mai sunt încrucişate. Acest lucru este remarcabil, dat fiind că programul nu testează intersecțiile între conducte şi nu ia niciun fel de măsuri pentru evitarea lor. Rezultatul se atinge strict din acțiunile individuale ale conductelor, care nu fac altceva decât să tragă de capete cu forțele deduse aici.

Rulări repetate pe acelaşi set de consumatori arată că soluția găsită după câteva zgâlțâiri nu mai poate fi îmbunătățită decât eventual marginal, cu scăderi ale costului rețelei dincolo de a treia cifră semnificativă.

DISCUȚIE

Datorită generalității ecuațiilor de pornire, rezultatele deduse sunt valabile pentru o clasă largă de fenomene de transport (de apă, de curent electric, de căldură etc.) în diverse regimuri (curgere laminară sau turbulentă) şi pentru mai multe criterii de optimizare (minimizarea costului săpăturilor pentru instalarea conductelor, a costului cămăşilor conductelor, a costului fluidului cuprins în conducte sau chiar a unui cost de mentenanță ce depinde de debit). Toate aceste fenomene sunt guvernate de aceleaşi două legi calitative ce caracterizează rețeaua de cost minim:

1. Raportul cost/putere disipată este acelaşi pentru toate conductele (ceea ce face ca secțiunile conductelor să fie proporționale cu o anume putere a debitului).

2. În orice nod liber, construind pe direcțiile conductelor vectori divergenți de lungimi egale cu o anumită putere a debitelor, aceşti vectori îşi fac echilibru.

Este de remarcat faptul că soluția găsită este simetrică în raport cu interschimbarea celor două mărimi: cea care trebuie minimizată şi cea care trebuie menținută constantă. Într-adevăr, puterea *n* din expresia funcției caracteristice rămâne aceeaşi dacă se schimbă $a \leftrightarrow A$ şi $b \leftrightarrow B$. Puterea la care apare debitul în expresia secțiunii rămâne deasemenea neschimbată. Aceasta înseamnă că rezultatele găsite se aplică neschimbate şi problemei inverse: determinarea rețelei cu pierderi minime de putere, la cost al conductelor constant.

Deşi simularea în Java a fost făcută în plan (din motive de claritate a imaginilor), rezultatele sunt valabile în general pentru o dispunere spațială a consumatorilor.

Algoritmul propus este local – în sensul că nu există o instanță centrală care coordonează optimizarea, ci ea apare ca un efect emergent al acțiunilor întreprinse de conducte şi noduri, pe baza informației accesibile local. Aceasta arată că mecansimul descris aici este plauzibil să acționeze în cazul rețelelor biologice (de vase de sânge, de vase capilare etc.) care tind să se auto-optimizeze sub raportul costului.

Găsirea soluției optime nu este garantată, din cauză că algoritmul poate deveni prizonierul unui minim local. Pentru ieşirea din minimul local, o soluție este aplicarea unui algoritm de *călire simulată*, care presupune perturbarea poziției nodurilor. Deocamdată metoda a fost testată manual, prin „zgâlțâirea” periodică a arborelui. Rezultatele arată că după o primă serie de perturbații, îmbunătățirile ulterioare sunt minore şi costul nu se mai poate îmbunătăți spectaculos.

Acest neajuns presupunem însă că este neimportant pentru rețelele biologice reale, care nu au de rezolvat dintr-o dată o problemă complexă de optimizare, ci au sarcina de a porni de la o stare minimală aproape optimă şi de a reacţiona apoi la mici modificări ale cerinţelor – necesarul de debit la un consumator creşte puţin, apare un nou consumator şi la început cere foarte puţin debit etc. Algoritmul propus aici este potrivit pentru studiul unor astfel de probleme de *creştere adaptativă*.

Dat fiind că geometria reţelei optimizate este dictată de funcţia caracteristică Φ, care depinde doar de debite, rezultă că unghiurile de ramificaţie care apar în reţeaua optimizată depind numai de debite. Debitele prin conducte au o anumită distribuţie statistică, care deci determină distribuţia statistică a unghiurilor de ramificaţie. O cercetare ulterioară ar putea să coreleze distribuţiile statistice ale unghiurilor de ramificaţie cu distribuţiile statistice ale debitelor în unele reţele biologice, pentru a verifica în ce măsură modelul propus aici este compatibil cu realitatea biologică.

În fine, problema tratată aici este doar un prim pas – pasul următor este considerarea unor restricţii de presiune impuse la consumatori.