ASUPRA DEPENDENŢEI DINTRE VITEZĂ ŞI DENSITATE ÎN TRAFICUL RUTIER

Conf.dr.ing. **Vasile DRAGU** [1], Prof.dr.ing. **Mihaela POPA** [1], Asist.dr.ing. **Eugenia Alina ROMAN** [1]

[1] Universitatea Politehnica din Bucureşti, Romania

REZUMAT. Capacitatea drumului este elementul determinant în asigurarea deplasării integrale a bunurilor şi persoanelor într-un anumit interval de timp cu respectarea condiţiilor de siguranţă şi securitate. Se cunoaşte că debitul este determinat de alte două mărimi fundamentale în teoria traficului rutier: viteza şi densitatea. De-a lungul timpului, în multe studii de specialitate a fost analizată dependenţa dintre cele două mărimi şi evidenţiată influenţa acestora asupra debitului. Lucrarea de faţă, face o analiză comparativă a relaţiilor existente între viteza şi densitatea traficului şi propune noi modele ale dependentei dintre viteză şi densitate care să redea cât mai fidel datele de circulaţie înregistrate statistic.

Cuvinte cheie: trafic rutier, viteză, densitate, debit.

ABSTRACT. The road capacity is the main element in ensuring the movement of goods and people in a certain time and under certain conditions of safety and security. It is known that the road capacity is determined by two base units in traffic flow theory: the speed and density. Over time, the dependence between the two highlighted units and their influence on the road capacity was analyzed in many studies. This paper makes a comparative analysis of the existing relationship between speed and traffic density and proposes new models of dependence between speed and traffic density that best reflect the traffic data recorded statistically.

Keywords: traffic, speed, density, flow.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

În cele mai multe lucrări [2, 4, 5, 8, 12, 14, 16] fluxul de trafic este studiat prin analogii hidrodinamice sau prin analogii cu mişcarea electronilor într-un circuit. Ceea ce distinge fluxul de vehicule de alte fluxuri energetice sau materiale este așa numita diagramă fundamentală a relației dintre caracteristicile fluxului de trafic - flux (q), viteză (v), densitate (k), care sunt de regulă reprezentate grafic prin diagrame de dependenţă.

Studiile care se ocupă cu determinarea capacității reţelei infrastructurii rutiere folosesc relația de dependenţă viteză-flux dar şi alţi factori cum ar fi: continuitatea fluxului, libertataea de manevră sau frecvenţa depăşirilor, pentru a stabili nivelul de serviciu oferit şi a determina astfel calitatea circulaţiei pe infrastructura respectivă [11]. De aceea, modelele care oferă cea mai bună fundamentare a acestei relații de dependență folosesc o fundamentare matematică a analizei fluxului de trafic pentru un control eficient al circulaţiei.

Necesitatea de a studia dependența viteză-densitate este izvorâtă din nevoia de a găsi un singur model care să corespundă tuturor regimurilor de circulație, dar care să rămână rezonabil de precis și să fie relativ simplu din punct de vedere matematic, având în vedere că valoarea maximă a fluxului se obţine prin derivarea expresiei debitului în raport cu densitatea şi ulterior egalarea cu zero a acesteia.

Relaţia de dependenţă dintre viteză şi densitate este fundamentală deoarece este legată direct de condițiile zilnice de trafic (de exemplu cum este influențată alegerea vitezei de deplasare de existența altor vehicule în vecinătate). O astfel de observație a stat la baza multor modele viteză-densitate, începând încă din 1935 cu modelul lui Greenshields [5]. Studiile privind determinarea celor mai potrivite modele viteză-densitate au însă două obiective contradictorii: simplitatea matematică și acuratețea empirică.

Lucrarea îşi propune să modeleze relația dintre viteză și densitate în condițiile menținerii unei simplităţi matematice dar și a unei acurateți empirice.

În lucrare, se prezintă o familie de modele viteză-densitate determinate de succesul curbelor logistice generalizate în modelarea fenomenului de creștere a dinamicii populației, creșterea plantelor în agricultură, creșterea epidemică în biologie sau creșterea piețelor în economie.

2. MODELE VITEZĂ-DENSITATE PENTRU UN SINGUR REGIM DE CIRCULAŢIE

Un model al dependenţei viteză-densitate trebuie să aibă următoarele caracteristici:

1) să aibă o formă funcțională simplă;

2) să ofere valori plauzibile ale vitezei pentru întreaga gamă de densităţi;

3) să foloseasca parametri fizici semnificativi;

4) să reproducă cât mai fidel observațiile empirice și statistice ale traficului.

Modelul Greenshields este descris printr-o ecuație a dreptei şi este frecvent folosit în scopuri didactice și demonstrative [12]. Evoluția studiilor analitice ale fluxului de trafic au condus către o relație de dependență între flux și densitate definită prin funcţii derivabile pentru a determina valoarea maximă a fluxului. Pe de altă parte, formularea unui model pe baza observațiilor empirice este totdeauna încărcată de echivoc. Pornind de la modelul lui Greenshields, au fost propuse mai multe modele (tabelul 1) cu diferite rate de acceptare, în funcţie de acuratețea empirică. Aceste modele folosesc pentru definirea vitezei în funcţie de densitate o singură relaţie și prin urmare păstrează simplitatea matematică. Pentru o mai bună reprezentare a fenomenului fizic, curba viteză-densitate a fost descompusă în mai multe plaje de valori ale densităţii traficului. Un astfel de exemplu poate fi găsit în planșa 23-3 din HCM 2000, care dă o familie de ecuații empirice a dependenței dintre viteză şi flux [6].

Tabelul 1 indică cele mai întâlnite modele ale dependenței viteză-densitate pentru regim unic de circulație. Parametri modelelor sunt, în principal viteza pentru cazul densității nule (v_f), densitatea de blocaj (k_j) dar şi alţi parametri calibraţi din observaţiile experimentale. În figura 1 este prezentat modul în care relațiile descrise aproximează datele empirice cele mai frecvent întâlnite în circulația pe o autostradă [16].

Principala critică a modelelor existente viteză-densitate este capacitatea lor limitată de a satisface în același timp criteriile de simplitate matematică și precizie empirică. De exemplu, modelul lui Greenshields (1935) este extrem de simplu din punct de vedere matematic dar insuficient de precis pentru a reprezenta fidel observațiile empirice. Modelul Greenberg [4] constituie o punte de legătură între modelele macroscopice și modelele denumite *General Motor car – following*, dar conduce la o viteză care tinde spre infinit pentru cazul fluxului liber, lucru neacceptat din punct de vedere fizic. În plus, viteza optimă (cea care dă valoarea maximă a fluxului) și densitatea de blocaj sunt dificil de pus în evidență din datele empirice. În ceea ce priveşte modelul lui Underwood [14] principalele dezavantaje sunt densitatea de blocaj care tinde la infinit și densitatea optimă se obţine din observații empirice. O altă critică a modelului lui Underwood este aceea că viteza nu este niciodată zero. Această deficiență apare și în modelul lui Northwestern. Modelele Drew (1968), Pipe-Munjal (Pipes, 1967) și modelul modificat Greenshields [8] au moştenit neajunsurile modelului Greenshields deoarece acestea sunt forme derivate ale modelului de bază Greenshields.

Modelul Van Aerde [15] este derivat din modelul Van Aerde de urmărire a vehiculelor, care foloseşte patru parametri. Modelul Newell [9] este, de asemenea derivat din modelul de urmărire a vehiculelor dar asociat cu parametrul microscopic λ. În modelul Newell viteza traficului scade foarte repede în raport cu creșterea densității, ceea ce nu este în acord cu cele mai multe observații empirice.

O altă caracteristică importantă a modelelor este şi modul în care se obţine valoarea maximă a fluxului, aceasta fiind asociată cu capacitatea infrastructurii și deci satisfacerea nevoilor de deplasare adresate [13].

Din relația fundamentală a fluxurilor de trafic $q = kv$ se scoate k și se înlocuiește în relația care definește modelul Greenshields și se obține [1]:

$$v^2 - v \cdot v_f + \frac{v_f q}{k_j} = 0 \tag{1}$$

Soluțiile ecuației de gradul II în v sunt:

$$v_{1,2} = 0{,}5 v_f \pm \sqrt{v_f\left(0{,}25 v_f - \frac{q}{k_j}\right)}. \tag{2}$$

Valoarea maximă a debitului se determină prin egalarea cu zero a primei derivate a lui q în raport cu k.

$$q = k v_f\left(1 - \frac{k}{k_j}\right) \tag{3}$$

$$\frac{dq}{dk} = v_f\left(1 - 2\frac{k}{k_j}\right) = 0 \Rightarrow k = \frac{k_j}{2}. \tag{4}$$

Valoarea maximă a debitului este:

$$q_m = \frac{v_f\, k_j}{4}. \tag{5}$$

Tabelul 1. **Modele ale dependenței viteză-densitate pentru un singur regim de circulație**

Nr. crt.	Modelul	Funcția	Parametri	Observații
1	Greenshields (1935)	$v = a + b\,k;\;\; a = v_f$ $b = -\dfrac{v_f}{k_j}$	v_f, k_j	- simplitate matematică - lipsă fidelitate - scop didactic şi demonstrativ
2	Greenberg (1959)	$v = a \ln \dfrac{b}{k};\;\; a = v_f$ $b = k_j$	v_f, k_j	- simplitate matematică - $v \to \infty$ pentru condiţiile de flux liber
3	Underwood (1961)	$v = a e^{-bk};\;\; a = v_f$ $b = \dfrac{1}{k_j}$	v_f, k_j	- simplitate matematică - lipsă corelaţie fizică, $k_j \to \infty$ - v nu poate lua valoarea zero
4	Northwestern (1967)	$v = v_f \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k_0}\right)^2}$	v_f, k_0	- simplitate matematică - v nu este zero pentru nicio valoare a lui k
5	Drew (1968)	$v = v_f \left[1 - \left(\dfrac{k}{k_j}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right]$	v_f, k_j	- prezintă dezavantajele modelului Greenshields - formă matematică mai complexă
6	Pipes-Munjal (1967)	$v = v_f \left[1 - \left(\dfrac{k}{k_j}\right)^{n}\right]$	v_f, k_j	- prezintă dezavantajele modelului Greenshields - formă matematică mai complexă
7	Newell (1961)	$v = v_f \left[1 - e^{-\frac{\lambda}{v_f}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k_j}\right)}\right]$	v_f, λ, k_j	- formă matematică complexă datorită introducerii parametrului microscopic λ - viteza scade mai repede decât creşte densitatea
8	Greenshields modificat (1995)	$v = v_0 + \left(v_f - v_0\right)\left(1 - \dfrac{k}{k_j}\right)^{\alpha}$	v_0, v_f, k_j	- prezintă dezavantajele modelului Greenshields - formă matematică mai complexă
9	Kerner și Konhäuser (1994)	$v_e = v_f \left[\dfrac{1}{1 + e^{\frac{\frac{k}{k_m} - 0{,}25}{0{,}06}}} - 3{,}72 \cdot 10^{-6}\right]$	v_f, k_m	- model puțin studiat și aplicat în analizele de trafic
10	Del Castillo (1995)	$v = v_f \left[1 - e^{\frac{\lvert C_j \rvert}{v_f}\left(1 - \frac{k_j}{k}\right)}\right]$	v_f, C_j, k_j	- relaţie de dependenţă complexă - reproduce mai fidel observaţiile statistice
11	Van Aerde (1995)	$k = \dfrac{1}{c_1 + \dfrac{c_2}{v_f - v} + c_3 v}$	c_1, c_2, c_3, v_f	- derivat din modelul *car-follwing* cu patru parametri
12	MacNicholas (2008)	$v = v_f \left(\dfrac{k_j^n - k^n}{k_j^n + m k^n}\right)$	v_f, k_j, n, m	- relaţie de dependenţă complexă - reproduce mai fidel observaţiile statistice

Prelucrare după: Wang et al, 2011 [16]).

Pentru modelul Greenberg $\left(v = v_f \ln \frac{k_j}{k}\right)$ valoarea maximă a debitului se obține similar, astfel:

$$\frac{dq}{dk} = v_f \ln k_j - v_f \ln k - v_f \Rightarrow k = k_j e^{-1} \quad (6)$$

$$q_m = \frac{v_f k_j}{e}. \quad (7)$$

Totuși, modelul lui Greenberg are dezavantajul că, pentru $k = 0$, se obţine $v \to \infty$, ceea ce este neverosimil pentru că viteza în condiții de flux liber este finită.

Pentru modelul Underwood $\left(v = v_f e^{-\frac{k}{k_j}}\right)$, valoarea maximă a debitului se obține similar.

$$q = k v_f e^{-\frac{k}{k_j}} \quad (8)$$

$$\frac{dq}{dk} = v_f e^{-\frac{k}{k_j}} \left(1 - \frac{k}{k_j}\right) = 0 \Rightarrow k = k_j \quad (9)$$

$$q_m = \frac{v_f k_j}{e}, \quad (10)$$

relație similară cu cea din modelul lui Greenberg.

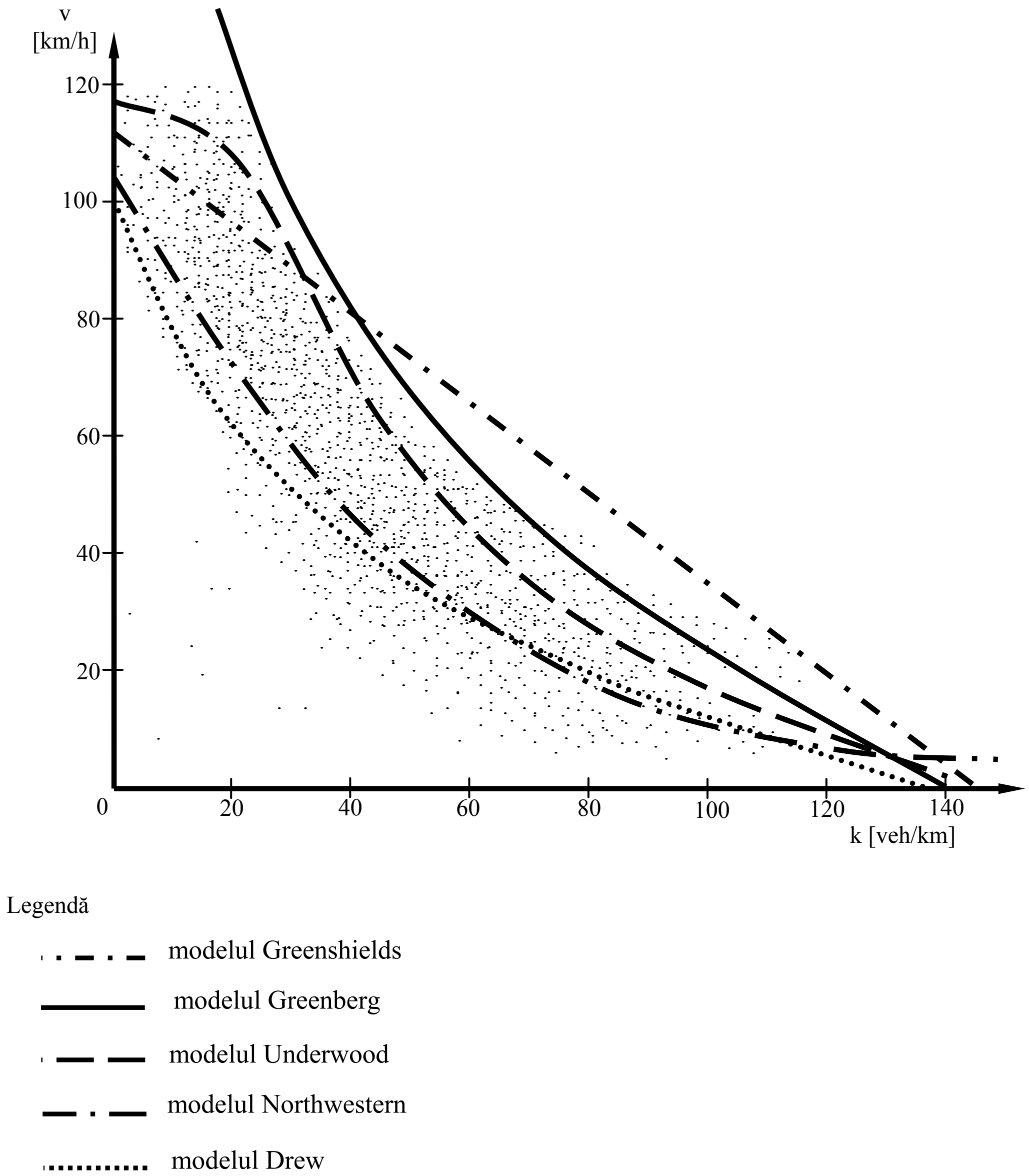

Fig. 1. Acuratețea modelelor viteză-densitate pentru un singur regim de circulație (prelucrare după: Wang et al, 2011 [16]).

3. MODELE VITEZĂ-DENSITATE PENTRU MAI MULTE REGIMURI DE CIRCULAŢIE

Modelele pentru un singur regim de circulație nu pot reprezenta fidel datele empirice în regim de flux liber şi în regim congestionat, ceea ce a condus la necesitatea căutării de modele multiregim. De obicei, modelele multiregim includ două sau trei modele funcţionale, aşa cum sunt prezentate în tabelul 2 şi figurile 2 şi 3. Ideea de bază a unui model cu două regimuri este de a folosi două curbe diferite pentru a reprezenta cele două regimuri de circulație diferite; circulația în regim de flux liber și circulația în regim de flux congestionat. Modelul lui Edie [3] este primul model multiregim și folosește modelul Underwood pentru regimul de circulație în flux liber și modelul Greeberg pentru regimul de circulație în flux congestionat. Există un model cu trei regimuri de circulație care a folosit trei curbe liniare Greenshields pentru a reprezenta modelul de trafic liber, trafic de tranziție și circulație în regim de trafic congestionat.

Tabelul 2. **Modele viteză-densitate pentru mai multe regimuri de circulație**

Nr. crt.	Modelul	Flux		
		Liber	De tranziție	Congestionat
1	Edie (1961)	$v = 54{,}9e^{-\frac{k}{163{,}9}}$ $(k \le 50)$	–	$v = 26{,}8\ln\left(\frac{162{,}5}{k}\right)$ $(k \ge 50)$
2	Model cu două regimuri (1990)	$v = 60{,}9 - 0{,}515k$ $(k \le 65)$	–	$v = 40 - 0{,}265k$ $(k \ge 65)$
3	Greenberg modificat (2005)	$v = 48$ $(k \le 35)$	–	$v = 32\ln\left(\frac{145{,}5}{k}\right)$ $(k \ge 35)$
4	Model liniar cu trei regimuri (1967)	$v = 50 - 0{,}098k$ $(k \le 40)$	$v = 81{,}4 - 0{,}913k$ $(40 \le k \le 65)$	$v = 40 - 0{,}265k$ $(k \ge 65)$

(prelucrare după Wang et al, 2011 [16])

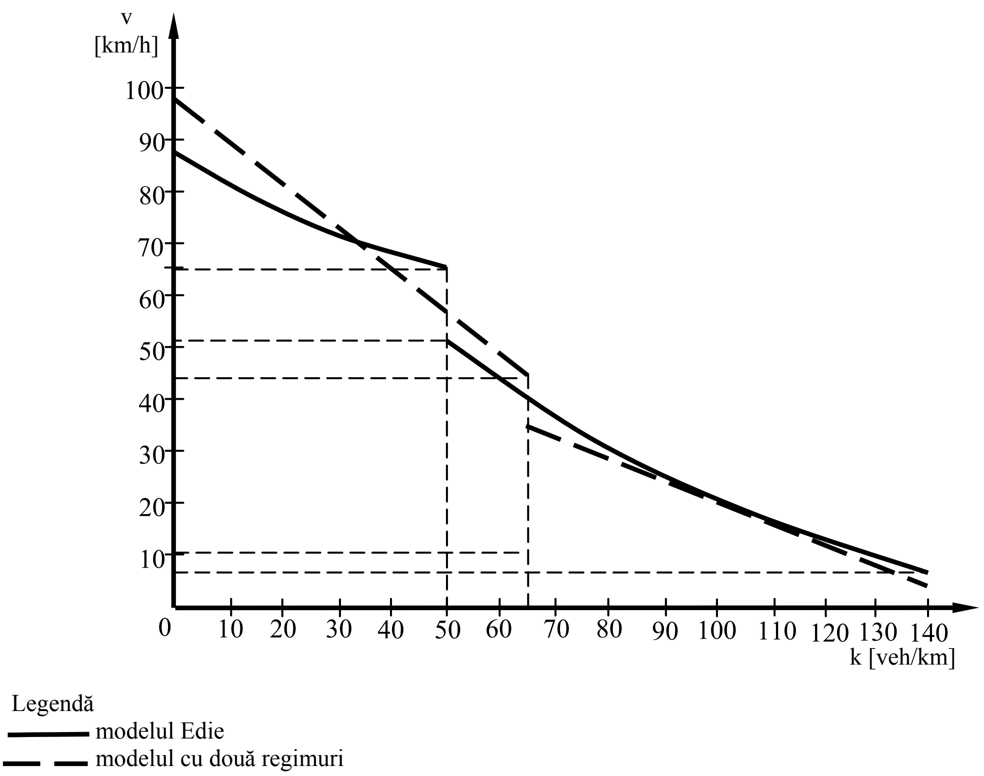

Fig. 2. Reprezentarea modelului Edie şi a celui pentru două regimuri de circulaţie.

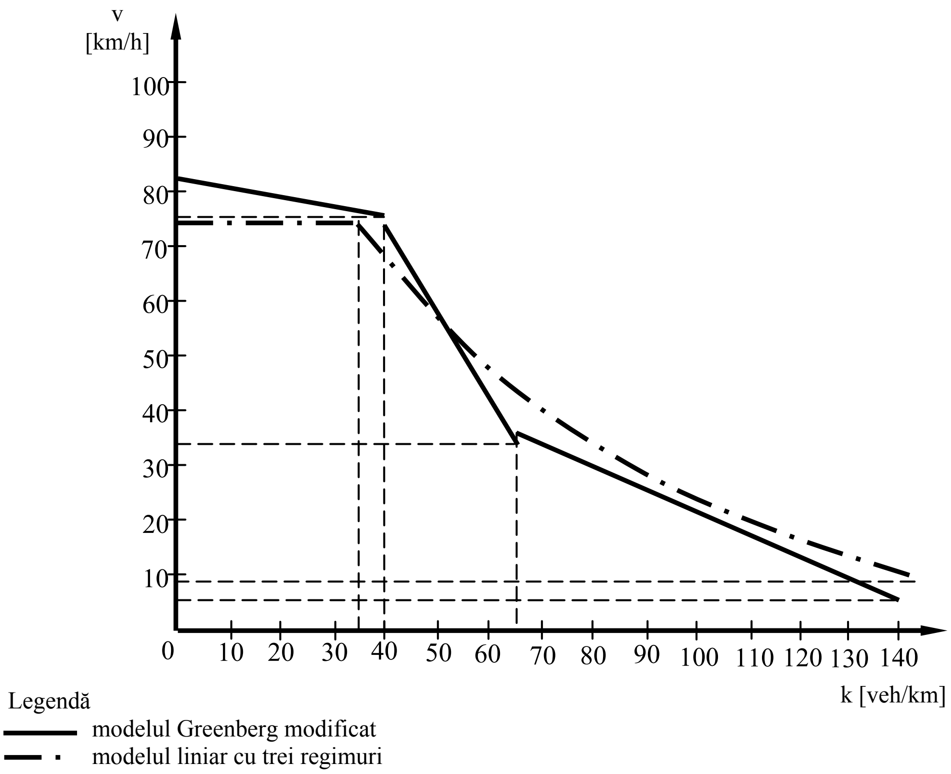

Fig. 3. Reprezentarea modelului Greenberg modificat şi a celui cu trei regimuri de circulație.

Modelele viteză-densitate multiregim sunt prezentate în figurile 2 şi 3.

Principala critică a modelelor multiregim este incapacitatea lor în a determina punctele de joncțiune între regimuri (punctul de tranziție de la un regim la altul) în mod riguros matematic.

4. MODELE VITEZĂ-DENSITATE CARE FOLOSESC CURBE LOGISTICE GENERALIZATE

Motivația folosirii curbelor logistice generalizate este determinată de succesul avut de modelele de creștere dinamică a *pattern*-ului. Curba logistică (uneori numită modelul lui Verhulst sau curba de creștere logistică [7] a fost dezvoltată pentru prima data de matematicianul belgian Pierre Verhulstis pentru modelul de creștere a populației în anii 1840. Este o curbă în formă de S care a fost folosită pentru a reprezenta funcții (sau fenomene) care cresc treptat la început având o asimptotă inferioară orizontală, apoi crește rapid (în partea de mijloc) și în final afișează o creștere lentă către sfârșit, înainte de a se stabiliza către o asimptotă orizontală superioară. Prima parte a curbei urmărește aproximativ o tendință exponențială; rata de creștere se accelerează către mijlocul curbei apoi rata de creștere se micșorează, dar creșterea continuă până la sfârșit, punct care uzual, in teoria fluxurilor de trafic se numește densitate de blocaj. Acest tip de curbă a fost folosit frecvent la modelul biologic de creștere a *pattern*-ului. În mod similar, această curbă poate fi ajustată pentru a modela o tendință inversă, care descrește la început, dar încet (având o asimptotă orizontală în partea de sus), descrește rapid în partea de mijloc și apoi descrește lent (având o asimptotă orizontală inferioară) până la o valoare minimă finală. Aplicarea ecuației logistice pentru a modela dependența empirică viteză-densitate este motivată de această similitudine a comportamentului funcțional între punctele de început și de sfârșit, ale curbei viteză-densitate.

Alegerea funcției logistice generalizate pentru a modela relația de dependență viteză-densitate este susținută și de observațiile empirice realizate în 100 de puncte, din care 78 pe segmente de bază ale unei autostrăzi [16], dar și din următoarele considerente:

1. curba logistică urmărește fidel observațiile empirice ale dependenței viteză-densitate;
2. are o formă matematică relativ simplă și anumite propietăți analitice (este mărginită, derivabilă și integrabilă);
3. este model pentru un singur regim, dar poate surprinde majoritatea fenomenelor produse în timpul circulației (flux liber, de tranziție sau flux saturat);
4. parametrii modelului au o semnificație fizică – v_s, v_b, k_t.

Un model viteză-densitate *sinusoidal* se poate scrie sub forma:

$$v\left(k,\theta\right)=v_b+\frac{v_s-v_b}{\left(1+e^{\left(\frac{k-k_t}{\theta_1}\right)}\right)^{\theta_2}} \qquad (11)$$

Aceasta este cea mai generală ecuație viteză-densitate, în formă sinosoidală. Aici v_s și v_b sunt asimptotele orizontale superioară și inferioară.Pentru cazul nostru v_s este viteza în condițiile de flux liber iar v_b este viteza în condiții de congestie.

Prin θ_1 se defineşte este un parametru de scară care caracterizează modul în care curba acoperă întreaga gamă de densități; θ_2 este un parametru care controlează simetria curbei față de asimptotele v_s și v_b ; k_t este parametrul care indică punctul în care curba viteză-densitate face tranziția de la circulația în regim de flux liber la cea de flux congestionat. După determinarea celor mai potriviți parametri, (după calibrare) conform observațiilor empirice, pentru modelul logistic viteză-densitate expresia densităţii traficului poate fi scrisă [16]:

$$k=k_t+\theta_1\, log\left(e^{\frac{log\frac{v_s-v_b}{v-v_b}}{\theta_2}}\right)-1 \qquad (12)$$

Figura 4 arată performanța modelelor logistice viteză-densitate cu 5, 4 sau 3 parametri (conform datelor empirice). Din figura 4 se observă că modelul logistic viteză-densitate cu 5 parametri reprezintă cel mai fidel datele empirice. Ea nu este deasupra sau sub viteza estimată pe întreaga gamă de densități [16].

Modelul cu 5 parametri este asimetric deoarece $\theta_2 \neq 1$. Dacă se alege $\theta_2=1$ se obține modelul logistic viteză-densitate cu 4 parametri:

$$v\left(k,\theta\right)=v_b+\frac{v_s-v_b}{1+e^{\frac{k-k_c}{\theta_1}}} \qquad (13)$$

Interpretarea fizică a lui $\theta_2=1$ este o curbă echilibrată în ambele părți ale lui k_c. Spre deosebire de modelul cu 5 parametri, modelul cu 4 parametri (folosește) densitatea critică a traficului k_c, în loc de k_t. Și din ecuația (20) se obține $k_{IP}=k_c$ când $\theta_2=1$. În comparaţie cu modelul cu 5 parametri, cel cu 4 parametri nu urmăreşte atât de fidel datele empirice. Acesta tinde să subevalueze viteza traficului când densitatea crește.

Ceilalţi parametri au aceleași semnificații ca în modelul cu 5 parametri.

Modelul logistic viteză-densitate cu 3 parametri, se obține prin eliminarea din relație a vitezei de circulație în condiții de congestie $\left(v_b=0\right)$ și se obține:

$$v\left(k,\theta\right)=\frac{v_s}{1+e^{\frac{k-k_c}{\theta_1}}} \qquad (14)$$

Din cauza faptului că numărul de parametri este mic (3), în general, acest model nu poate reprezenta fidel fenomenul studiat. Dar, modelul logistic viteză-densitate cu 3 parametri lucrează bine în comparație cu modelele deterministe definite în Tabelul 1. Ceilalţi parametri au aceeaşi semnificație ca în modelul cu 4 parametri.

Când se studiază comportamentul asimptotic al modelului logistic viteză-densitate cu 5 parametri apar două cazuri. Dacă notăm $\delta=e^{\frac{k-k_t}{\theta_1}}$, atunci cele două cazuri apar când $\delta\to 0$ și $\delta\to\infty$. În particular, când $\delta\to 0$ atunci $v\to v_s$ și când $\delta\to\infty$ atunci $v\to v_b$. Teoretic acestea sunt condițiile limită.

Este cunoscut faptul că k_t și θ_1 sunt parametri și pot fi cunoscuți aproximativ. Densitatea traficului k variază între zero și densitatea de blocaj, k_j. Când $k\to 0$ conduce la $\delta\approx e^{\left(-\frac{k_t}{\theta_1}\right)}$, de regulă, raportul $-\frac{k_t}{\theta_1}\in\left(-10;-4\right)$, ceea ce arată că δ va fi un număr foarte mic ceea ce fizic înseamnă că circulă cel mult un vehicul. Atunci când $k\to k_j$ aceasta conduce la $\delta\to e^{\frac{k_j-k_t}{\theta_1}}$, în timp ce $\left(\frac{k_j-k_t}{\theta_1}\right)$ va fi un număr foarte mare care va conduce ca δ să tindă la ∞ ceea ce se traduce în sens fizic prin circulația în regim de congestie. Acest lucru asigură valabilitatea condiției limită.

Ecuația (11) poate fi scrisă ca:

$$v\left(k,\theta\right)=v_b+\left(v_s-v_b\right)\left(1+\delta\right)^{-\theta_2} \qquad (15)$$

în care $\delta=e^{\frac{k-k_t}{\theta_1}}<<1$. Când $\delta<<1$ teorema lui Taylor dă $\left(1+\delta\right)^{-\theta_2}\approx 1-\theta_2\delta$. Înlocuind în (15) obținem:

$$v\left(k,\theta\right)\approx v_b+\left(v_s-v_b\right)\left(1-\theta_2\delta\right)=$$
$$=v_s-\theta_2\left(v_s-v_b\right)e^{\frac{k-k_t}{\theta_1}} \qquad (16)$$

Când $\delta >> 1$, numitorul $1+\delta$ devine egal cu δ și se poate scrie:

$$v(k,\theta) \approx v_b + \frac{v_s - v_b}{\left(e^{\frac{k-k_t}{\theta_1}}\right)^{\theta_2}} =$$

$$= v_b + (v_s - v_b)\left(e^{\frac{k-k_t}{\theta_1}}\right)^{-\theta_2} \quad (17)$$

Ecuațiile (16) și (17) pot fi utilizate ca alternative pentru a efectua aproximarea sau o analiză de senzitivitate.

Parametrul k_t este punctul în care curba viteză-densitate face tranziția de la regimul de flux liber la regimul de flux sincronizat sau flux cu libertate limitată. Spre deosebire de k_t, punctul de inflexiune k_{IP} este acolo unde curba își schimbă forma; din concavă devine convexă. Derivata a doua va indica punctul de inflexiune.

Utilizând aceeași notație pentru $\left(e^{\frac{k-k_t}{\theta_1}}\right)$ și derivând ecuația (13) în raport cu k se obține:

$$v'(k,\theta) = -(v_s - v_b)\,\theta_2\delta\,(1+\delta)^{-\theta_2}\,\theta_1^{-1}(1+\delta)^{-1} \quad (18)$$

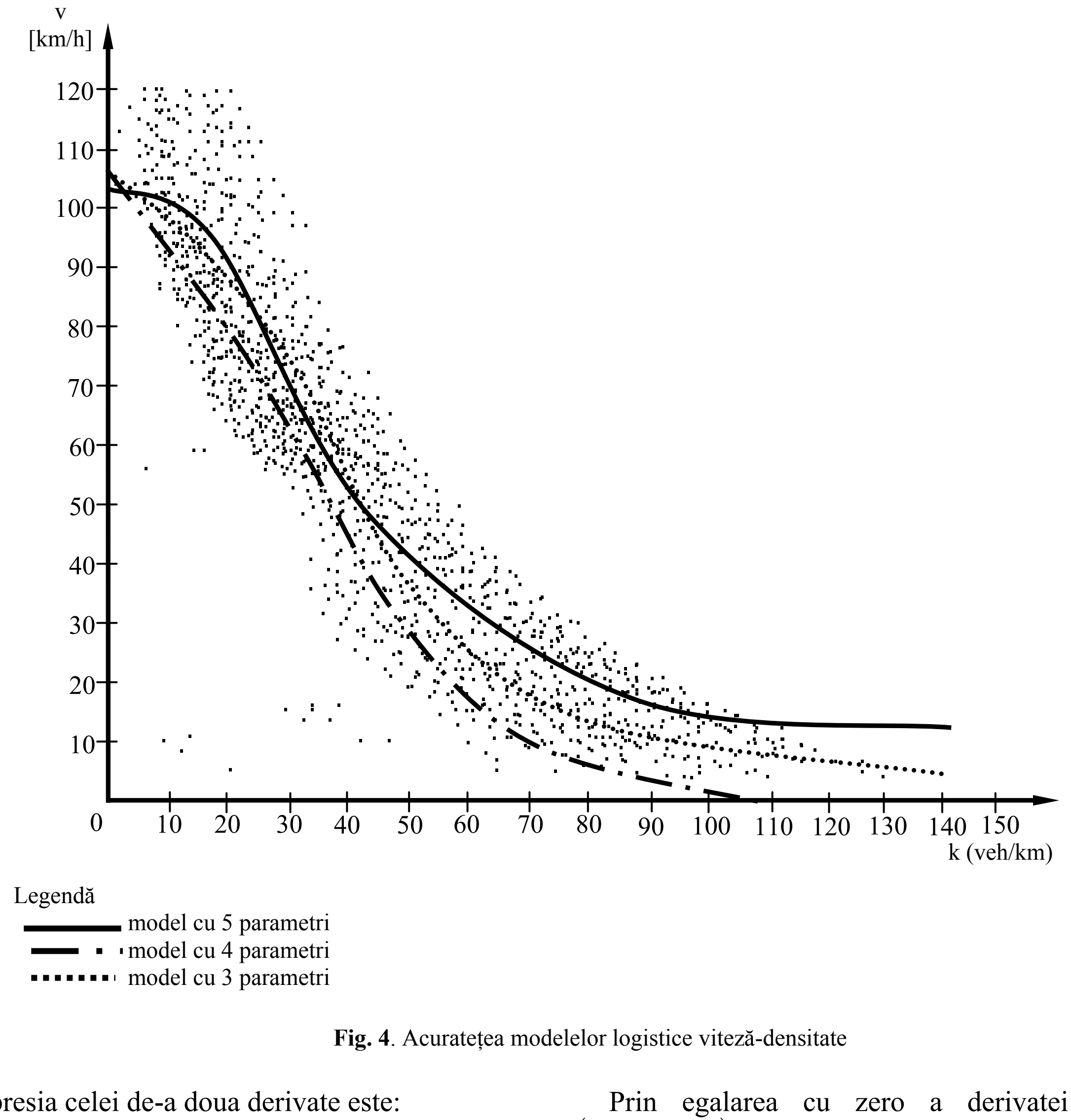

Fig. 4. Acuratețea modelelor logistice viteză-densitate

Expresia celei de-a doua derivate este:

$$v''(k,\theta) = (v_s - v_b)\,\theta_2^2\delta^2(1+\delta)^{-\theta_2}\,\theta_1^{-2}(1+\delta)^{-2} -$$
$$-(v_s - v_b)\theta_2 \cdot \delta(1+\delta)^{-\theta_2}\,\theta_1^{-2}(1+\delta)^{-1} + (v_s - v_b)$$
$$\theta_2\delta^2(1+\delta)^{-\theta_2}\,\theta_1^{-2}\cdot(1+\delta)^{-2} \quad (19)$$

Prin egalarea cu zero a derivatei a doua $\left(v''(k,\theta)=0\right)$ se obține soluția:

$$k_{IP} = k_t - \theta_1 \ln(\theta_2) \quad (20)$$

Modelul logistic viteză-densitate are un singur punct de inflexiune în faza de tranziție. Pentru modelul logistic viteză-densitate cu 5 parametri, curba are ca asimptotă orizontală valoarea v_s (în partea superioară) și asimptotă orizontală, în partea inferioară, v_b. Apropierea de aceste asimptote se face cu rate diferite în funcție de valorile lui θ_2 $(\theta_2 \neq 1)$.

S-a demonstrat că modelul logistic viteză-densitate cu 5 parametri definește mai bine observațiile empirice decât modelele cu 4 sau 3 parametri.

Modelul viteză-densitate definit prin relaţia (11) este o funcție monoton descrescătoare care are nevoie de toți cei 5 parametri $(v_s, v_b, k_t, \theta_1$ și $\theta_2)$ pentru a fi mai mare ca zero.

Se subliniază că parametrii θ_1 și θ_2 nu se pot determina din observațiile din teren, ci se oferă o modalitate de a-i estima din media empirică a modelului logistic viteză-densitate cu 5 parametri (Wang et al., 2001). Prin trasarea grafică a parametrilor θ_1 și θ_2 cu valori observate direct, ca în cazul mărimilor v_s și k_t, nu se poate observa nici o legătură directă între θ_1, θ_2 și v_s, dar se poate aproxima ca o relație liniară între θ_1, θ_2 și k_t [16]. Folosind metoda regresiei liniare a celor mai mici pătrate se obțin ecuațiile (21) și (22):

$$\theta_1 = 0{,}161\, k_t + 0{,}0337 \qquad (21)$$

$$\theta_2 = 0{,}0093\, k_t - 0{,}0507 \qquad (22)$$

Presupunând că parametri θ_1 și θ_2 depind de valoarea k_t, modelul logistic viteză-densitate cu 5 parametri poate fi redus la un model cu 3 parametri, astfel:

$$v(k, \theta) = v_b + \frac{v_s - v_b}{\left(1 + e^{\frac{k - k_t}{\theta_1(k_t)}}\right)^{\theta_2(k_t)}} \qquad (23)$$

În procesul de calcul, se folosește viteza medie temporală pentru a calcula densitatea (aceasta în locul vitezei medii spațiale), cunoscut că în relația fundamentală a teoriei fluxurilor de trafic $(q = k\, v_s)$ se folosește viteza medie spațială.

5. CONCLUZII

Analiza dependenţei dintre viteză şi densitate în traficul rutier este determinantă şi pentru capacitatea infrastructurilor rutiere, parametru deosebit de important pentru satisfacerea nevoilor de deplasare ale societăţii. Creşterea capacităţii infrastructurilor, prin păstrarea aceloraşi dimensiuni geometrice este un deziderat izvorât din considerentele unei dezvoltări durabile imperios cerută astăzi de decidenţii politici specialiştilor din transporturi. Relaţia de dependenţă viteză-densitate este importantă deoarece este legată direct de condiţiile de circulaţie care influenţează alegerile utilizatorilor (alegerea rutei şi posibilitatea de a alege viteza de deplasare). Aceste alegeri succesive conduc la solicitări diferite ale infrastructurilor care afectează condiţiile de calitate ale deplasărilor. Necesitatea de a studia dependenţa viteză-densitate este izvorâtă din nevoia de a găsi un singur model matematic care să corespundă tuturor regimurilor de circulaţie pe o infrastructură, dar care să rămână rezonabil de precis și să fie relativ simplu din punct de vedere matematic.

Lucrarea a luat în discuţie cele mai cunoscute modele ale dependenţei viteză-densitate (modele pentru un singur regim, modele pentru mai multe regimuri de circulaţie şi modele descrise prin curbe logistice generalizate) şi a formulat observaţii critice asupra acestora.

În particular, lucrarea s-a concentrat asupra proprietăților și analizei modelului logistic viteză-densitate cu 5 parametri. S-a demonstrat că modelul logistic viteză-densitate cu 5 parametri poate reprezenta fidel observațiile empirice pentru întreaga gamă de valori ale densității și este general valabil. Printre cei 5 parametri necesari în model, v_s este ușor de obținut din observațiile empirice, v_b este un parametru specificat de utilizatori (din experiența lor proprie) dar k_t este relativ dificil de determinat deoarece traficul poate trece de la regimul de flux liber la cel congestionat la diferite densități şi în diferite puncte ale infrastructurii analizate.

BIBLIOGRAFIE

[1] Dragu, V., Popa Mihaela, Ștefănică Cristina, *Trafic rutier I – Lucrări aplicative*, Editura Printech, Bucureşti, 2015.

[2] Drew, D. R., *Traffic Flow Theory and Control*, Mc Graw-Hill Book Company, 1968.

[3] Edie, L. C., *Car-following and steady-state theory for noncongested traffic*, Operations Research **9** (66), 1961.

[4] Greenberg, H., An analysis of traffic flow, Operation Research **7**, p. 79-85, 1959.

[5] Greenshields, B. D., *A study in highway capacity*, Highway Research Board Proccedings **14**, p. 448-477, 1935.

[6] Highway Capacity Manual, Transportation Research Board, Washington DC, fourth edition, 2000.

[7] Huet, M., Bouvier, A., *Statistical Tools for Nonlinear Regression a Practical Guide with S-Plus and R Examples*, Second Ed., Springer, 2004.

[8] Jayakrishnan, A.C.R., Tsai, W. K., *A dynamic traffic assignment model with traffic flow relationship*, Transportation Research Part C, **3** (1), p. 51-72, 1995.

[9] Newell, G. F., *New linear effects in the dynamics of car following*, Operation Research **9**, 209, 1961.

[10] Pipes, L. A., *Car following models and the fundamental diagram of road traffic*, Transportation Research **1**, p. 21-29, 1967.

[11] Popa, Mihaela, *Elemente de economia transporturilor*, Editura BREN, Bucureşti, 2004.
[12] Raicu, Ş., Sisteme de transport, Editura AGIR, Bucureşti, 2007.
[13] Roşca, M. A., Rosca, E., Rusca, F., Carlan, V., *Computer simulation for operational traffic improvement in urban intersections*, Proceedings of the 15th International Conference on Automatic Control, Modelling & Simulation (ACMOS I3, Brasov), Vol. **13**, p. 98-102, 2013.
[14] Underwood, R. T., Speed, volume and density relationship: quality and theory of traffic flow, Yale Bureau of Highway Traffic, p. 141-188, 1961.
[15] Van Aerde, M., Simple regime speed-flow-density relationship for congested and uncongested highways, The 74th TRB Annual Conference, Washington DC, Transportation Research Board, 1995.
[16] Wang, H., Jia Li, J., Chen, , Q. Y., Daiheng Ni, *Logistic modeling of the equilibrium speed density relationship*, Transportation Research Part A **45**, pp. 554-566, 2011.

Despre autori

Conf.dr.ing. **Vasile DRAGU**
Universitatea POLITEHNICA din Bucureşti, România

Absolvent al Universităţii Politehnica din Bucureşti, Facultatea Transporturi, specializarea Tehnologia transporturilor şi telecomenzi feroviare din anul 1984. Cu începere din 1990 este cadru didactic la aceeasi universitate şi facultate, departamentul Transporturi, trafic şi logistică. Este titularul cursurilor de *Trafic rutier* şi *Terminale de transport* (cu începere din 2007) de la studiile de licenţă în specializarea Ingineria transporturilor şi a traficului şi *Infrastructuri de transport urban* şi *Modelarea cererii de transport* (cu începere din 2000) la studiile de master Transport şi trafic urban. A fost director de proiect la 6 teme de cercetare realizate din Planurile naţionale de cercetare sau cu agenţi economici. A scris 8 cărţi şi a elaborat peste 60 de lucrări ştiinţifice în domeniul Ingineriei transporturilor care au fost publicate în reviste de specialitate sau volume ale unor manifestări ştiinţifice naţionale/internaţionale de prestigiu.

Prof.dr.ing. **Mihaela POPA**
Universitatea POLITEHNICA din Bucureşti, România

Activitățile didactice și de cercetare desfășurate pe perioada a mai mult de două decenii în cadrul Facultăţii de Transporturi din UPB, Depatamentul ”Transporturi, trafic și logistică” au prilejuit introducerea și dezvoltarea unor discipline noi în programele de licenţă și de master din domeniul ingineriei transporturilor și logisticii cum sunt *Economia transporturilor*, *Transporturile şi mediul socio-economic şi natural*, *Strategii de dezvoltare a sistemelor de transport.* Programele analitice corespunzătoare au fost întocmite în acord cu programele de studii de la universităţi de prestigiu din lume, ţinând cont de cunoştinţele tehnice şi tehnologice primite de studenţii de la cele două cicluri de studii. Prof. Mihaela Popa a publicat 10 carti, manuale si capitole in volume colective si 5 îndrumare de aplicații practice pentru studenti, din care 8 în edituri de prestigiu din țară și din străinătate: Politehnica Press, AGIR, Elsevier, Nova Science, Verlag New&Media, Este autor sau coautor la 73 de articole si lucrari in extenso, din care 22 in reviste circulatie internationala și 27 in volumele unor conferinte de specialitate internationale.

Asist.dr.ing. **Alina Eugenia ROMAN**
Universitatea POLITEHNICA din Bucureşti, România

Absolventă a specializării Ingineria transporturilor şi a traficului din anul 2009, ca şef de promoţie al specializării şi al Facultăţii Transporturi, precum şi al studiilor de master în Logistica transporturilor din 2011. Autoare a tezei de doctorat *Intermodalitatea şi mobilitatea urbană durabilă*, şi a 8 lucrări ştiinţifice publicate în reviste de specialitate sau volumele unor conferinţe naţionale/internaţionale indexate în baze de date internaţionale. În prezent, este cadru didactic la aceeaşi universitate şi facultate, departamentul Transporturi, trafic şi logistică din anul 2015. În perioada 2009 - 2015 şi-a desfăşurat activitatea la SC Metroul SA realizând activităţi de cercetare/proiectare care vizau studii de trafic folosind programe specializate; studii pentru estimarea şi modelarea cererii de transport; planificarea transportului urban, studii de prefezabilitate/fezabilitate. Este o bună cunoscătoare a pachetelor software pentru macro şi microsimularea proceselor din transporturi - AIMSUN, VISSIM, VISUM, VISWALK.