

# UN AUTRE REGARD SUR LA CONVECTION MIXTE

Jacques PADET<sup>+</sup>

Renato M. COTTA<sup>++</sup> ; Emilia Cerna MLADIN<sup>+++</sup>

<sup>+</sup>UNIVERSITE DE REIMS, France. <sup>++</sup>UNIVERSITE FEDERALE DE RIO DE JANEIRO, Brésil.

<sup>+++</sup>UNIVERSITE POLITEHNICA, Bucarest, Roumanie.

Correspondance : [jacques.padet@univ-reims.fr](mailto:jacques.padet@univ-reims.fr)

**Rezumat.** Dans cet exposé, on tente d'abord de résoudre un préalable concernant la définition de la température de référence dans l'approximation de Boussinesq, qui ne doit pas être choisie arbitrairement. On insiste ensuite sur la continuité physique entre convection forcée, mixte et naturelle, la première et la troisième n'étant que des cas limites de la convection mixte. Toutefois, pour des raisons pratiques de calcul, il est souvent utile de fixer des frontières à ces trois modes de convection, et on indique sur quelles bases des critères de sélection peuvent être définis. Trois exemples simplifiés illustrent cette démarche.

**Abstract.** This conference deals with fundamental features in mixed convection, and first with the reference temperature used in the Boussinesq approximation, which must be carefully defined. Then we put emphasis on the physical continuity between forced, mixed and natural convection, the first and third ones being nothing else than asymptotical limits of mixed convection. But in practice, for computational heat transfer, it is generally useful to put boundaries to these three kinds of convection, and some selection criteria are proposed. Three special cases are chosen in order to illustrate the method.

## 1. Prologue

### 1.1. Les fondements de la convection mixte

Dans la plupart des traités de convection thermique, la convection mixte occupe (si elle n'est pas purement et simplement omise) une place modeste après la convection forcée, puis la convection naturelle. C'est qu'il s'agit d'un sujet encombrant et complexe, sur lequel on manque d'éléments pour en présenter une vue générale et cohérente.

Nous voudrions ici reconsidérer la place des différents phénomènes physiques qui interviennent dans la convection, et donner à la convection mixte la place centrale qui lui revient. Car tout transfert convectif fait obligatoirement appel à deux moteurs mécaniques : les forces de pression (caractérisées par un gradient de pression motrice  $\overrightarrow{grad} p^*$ ) et les forces de flottabilité (caractérisées par un gradient de masse volumique dans le champ de pesanteur). L'origine de ces forces de flottabilité (dites aussi poussée thermique ou poussée d'Archimède) réside elle-même dans la dilatabilité du fluide en fonction de la température.

Cependant, pour l'ingénieur (et aussi pour le chercheur...) l'approximation est une nécessité, et *nécessité fait loi*, dit-on en français. On voit donc qu'il est inévitable d'attribuer des « frontières » à la convection mixte, en précisant à quelles conditions la poussée thermique, ou bien la pression, peut être considérée comme négligeable dans les calculs. Ceci impose de fixer des limites – obligatoirement arbitraires, donc conventionnelles – entre convection naturelle (CN), convection mixte (CM) et convection forcée (CF). Dans cette perspective, la « CN pure » (gradient de pression motrice égal à zéro) et la « CF pure » (poussée thermique négligeable) se présentent comme des cas limites idéalisés, tandis que les situations de CN dominante et de CF dominante (appelées plus simplement CN et CF) doivent être caractérisées par des critères de discrimination clairs et physiquement fondés.

Nous nous proposons en particulier, dans ce qui suit, de tracer quelques pistes pour de tels critères.

Pour mémoire, rappelons d'abord les équations générales qui régissent les champs de vitesse et de température dans un écoulement anisotherme de fluide dilatable. Elles expriment respectivement le bilan de masse (équation de continuité), le bilan de quantité de mouvement, et le bilan d'énergie.

$$\overline{\text{div}} \rho \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\overline{\text{grad}} \vec{V} \cdot \rho \vec{V} = \rho \vec{g} - \overline{\text{grad}} p + \mu (\Delta \vec{V} + \overline{\text{grad}} \text{div} \vec{V}) \quad (2)$$

$$\rho C_p (\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} T) = \Phi + \text{div} (\lambda \overline{\text{grad}} T) \quad (3)$$

En vue de simplifier les calculs, on néglige généralement la fonction de dissipation  $\Phi$  et on adopte une approximation, appelée *hypothèse de Boussinesq*, qui comporte deux étapes :

- a) Les gradients de masse volumique dus à la pression sont supposés négligeables par rapport aux gradients dus à la température
- b) On procède à la linéarisation de la fonction  $\rho(T)$  au voisinage d'une température de référence  $T_{ref}$ , soit :

$$\rho = \rho_{ref} \{1 - \beta(T - T_{ref})\} \quad (4)$$

où  $\rho_{ref}$  et  $\beta$  sont la masse volumique et la dilatabilité du fluide à la température  $T_{ref}$ .

En introduisant la *pression motrice*  $p^*$  définie par

$$\overline{\text{grad}} p^* = \overline{\text{grad}} p - \rho \vec{g} \quad (5)$$

l'équation (2) devient, après division par  $\rho$  (sensiblement égal à  $\rho_{ref}$ ) :

$$\overline{\text{grad}} \vec{V} \cdot \vec{V} = \underbrace{-\beta(T - T_{ref})}_{(a)} \underbrace{\vec{g}}_{(b)} - \frac{1}{\rho} \underbrace{\overline{\text{grad}} p^*}_{(c)} + \nu \Delta \vec{V} \quad (6)$$

(la désignation par (a), (b), (c) des termes sources sera utilisée plus loin).

Quant à l'équation (3) elle est réduite à :

$$\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} T = a \Delta T \quad (7)$$

## 1.2. Les « frontières » de la convection mixte

Observons tout d'abord que les équations (6) et (7) ne font apparaître aucune limite physique entre les trois modes de convection. Si l'on fait tendre la dilatabilité  $\beta$  vers zéro, la convection forcée est dominante, et  $\beta = 0$  en CF pure. De même, quand le gradient de pression tend vers zéro, la convection naturelle est dominante, et  $\overline{\text{grad}} p^* = 0$  en CN pure.

Le besoin pratique de distinguer CF, CM et CN est donc essentiellement de nature calculatoire : on désire savoir quand on peut simplifier les calculs en négligeant soit la poussée thermique, soit la pression, dans l'équation (6).

Autrement dit, on est conduit à considérer par exemple qu'on est en CF si le terme de flottabilité représente moins de  $x\%$  du terme de viscosité, et qu'on est en CN si le terme de pression représente moins de  $y\%$  du terme de viscosité. Les valeurs  $x$  et  $y$  sont évidemment arbitraires, et devront être choisies de façon réaliste pour être acceptables par tous. En outre, d'autres éléments de comparaison peuvent être envisagés [1, 2, 3].

Ajoutons qu'une comparaison locale des termes sources dans l'équation de quantité de mouvement n'aurait évidemment aucun sens puisqu'elle ne serait pas significative vis-à-vis de l'écoulement d'ensemble. On devra donc raisonner sur des grandeurs moyennes calculées sur une section droite de l'écoulement.

Plus précisément, s'agissant de grandeurs qui peuvent être positives ou négatives, une moyenne arithmétique ne serait pas complètement représentative des forces en présence. Il nous paraît plus judicieux de faire porter les comparaisons sur les moyennes quadratiques  $\overline{a^2}$ ,  $\overline{b^2}$  et  $\overline{c^2}$ .

On doit enfin noter que la possibilité de comparer les trois types de forces est grandement facilitée par l'hypothèse de Boussinesq, et particulièrement par la linéarisation de  $\rho(T)$ . Mais ceci exige en contrepartie de préciser sans ambiguïté la **température de référence**  $T_{ref}$  à prendre en compte, laquelle ne doit pas être choisie arbitrairement comme c'est souvent le cas. Cette question a été soulevée par plusieurs auteurs [4, 5], mais ne semble pas encore avoir reçu une réponse de portée générale.

### 1.3. Présentation adimensionnelle de la convection mixte

En convection mixte, les critères de similitude relatifs à la poussée thermique, au gradient de pression, aux forces de viscosité et à la diffusion thermique sont respectivement :  $Ri$  (nombre de Richardson),  $1/Re$  et  $1/Pe$ . Les équations adimensionnées s'écrivent donc :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \overline{V^+} \cdot \overline{V^+} = Ri T^+ \overline{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(p^*)^+ + \frac{1}{Re} \Delta \overline{V^+} \quad (8)$$

$$\overline{V^+} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T^+ = \frac{1}{Pe} \Delta T^+ \quad (9)$$

C'est avec ces paramètres adimensionnés que les difficultés surgissent. Rappelons-nous d'abord que la vitesse de référence généralement utilisée est la vitesse débitante (dans les écoulements en canalisations) ou la vitesse loin de la paroi (dans les écoulements de couche limite). De la sorte, en CF,  $Ri = 0$  tandis que  $Re \neq 0$  et  $Pe \neq 0$ , ce qui ne soulève aucun problème : il y a continuité entre CM et CF. Mais en CN, la vitesse débitante peut être nulle. Alors  $Ri$ ,  $1/Re$ ,  $1/Pe$  sont infinis, ce qui les rend inutilisables. D'où l'introduction en CN d'une vitesse de référence basée sur la poussée thermique, qui conduit à la définition des nombres de Grashof  $Gr$  et Boussinesq  $Bo$  (ou Rayleigh  $Ra$ ).

Cependant, la méthode proposée au paragraphe précédent reste valide avec les grandeurs sans dimension. De surcroît, en ce qui concerne les rapports entre les termes sources, leur ordre de grandeur moyen peut être évalué en revenant à la définition d'un critère de similitude  $\Gamma$  [6, § 2.5.2] :

$$\Gamma = \frac{\text{flux de référence de la source}}{\text{flux de référence transporté par le fluide}} \quad (10a)$$

Considérons deux sources 1 et 2 dans un même bilan, leurs critères de similitude étant  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Le flux de référence transporté par le fluide est évidemment le même pour les deux, de sorte que :

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\text{flux de référence de la source 1}}{\text{flux de référence de la source 2}} \quad (10b)$$

Au vu de l'équation (8), l'ordre de grandeur du rapport entre poussée thermique et forces de viscosité est donc :

$$\frac{Ri}{1/Re} = Ri Re \quad (10c)$$

qui est le *coefficient de poussée thermique*.

En conséquence, dans la suite lorsque nous effectuerons cette comparaison, c'est-à-dire lorsque nous calculerons le rapport  $\overline{a^2}/\overline{c^2}$ , nous devons nous attendre à voir intervenir  $RiRe$  dans l'expression du résultat.

### 1.4. Choix méthodologiques

Pour éclairer la question posée, et en apprécier les implications, il est utile de travailler d'abord sur des configurations relativement élémentaires.

La simplification la plus radicale est de considérer **un cas particulier d'écoulement bidimensionnel établi**, tel que, si  $x$  est la direction de l'écoulement :

$$\partial U / \partial x = 0 \quad ; \quad \partial T / \partial x = 0 \quad ; \quad \partial p^* / \partial x = cte \quad (11)$$

Ces conditions correspondent à des fluides s'écoulant entre des parois parallèles indéfinies 1 et 2 portées à des températures uniformes  $T_1$  et  $T_2$ . Bien qu'elles puissent paraître très académiques, elles sont cependant réalisées dans certaines applications pratiques [7].

En ce qui concerne la température de référence  $T_{ref}$  dans l'approximation de Boussinesq (§1.2), nous choisirons de l'évaluer à partir d'une propriété qui paraît assez naturelle. En effet, on peut toujours écrire :

$$\rho = \rho - \rho_{ref} + \rho_{ref}$$

La masse d'une tranche fluide de hauteur  $h = 1$  (volume  $V =$  section  $S \times 1$ ) est :

$$m = \int_S \rho \, dV = \int_S (\rho - \rho_{ref}) \, dS + \int_S \rho_{ref} \, dS$$

$$m = - \int_S \rho_{ref} \beta (T - T_{ref}) \, dS + \rho_{ref} S \quad (12a)$$

Nous allons alors admettre que la masse volumique de référence est aussi la masse volumique moyenne du fluide dans le volume considéré, de sorte que :

$$m = \rho_{ref} S \quad (12b)$$

Dans ce cas

$$\int_S (T - T_{ref}) \, dS = 0 \quad ; \quad \text{et} \quad T_{ref} = \frac{1}{S} \int_S T \, dS \quad (13)$$

c'est à dire que  $T_{ref}$  est la moyenne géométrique de  $T$  dans une section droite de l'écoulement.

De plus, une conséquence de (12) et (13) est que :

$$\int_S \rho_{ref} \beta (T - T_{ref}) \, dS = 0 \quad (14)$$

Alors, avec les hypothèses (11), l'équation (6) se réduit à :

$$0 = - \frac{1}{\rho} \frac{dp^*}{dx} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (15a)$$

Si l'on intègre sur la section droite de l'écoulement, en appelant  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  les surfaces des parois,  $\tau_{p1}$  et  $\tau_{p2}$  les contraintes de frottement sur ces parois, on aboutit à la propriété suivante :

$$\Sigma_1 \tau_{p1} + \Sigma_2 \tau_{p2} = S \, dp^* / dx \quad (15b)$$

En d'autres termes, le bilan des forces de flottabilité sur le domaine fluide est nul, et les forces de pression sont équilibrées par les forces de frottement aux parois, comme en CF.

Trois exemples vont permettre d'illustrer la méthode proposée.

## 2. Premier exemple : géométrie plane, régime permanent

### 2.1. Champs de température et de vitesse

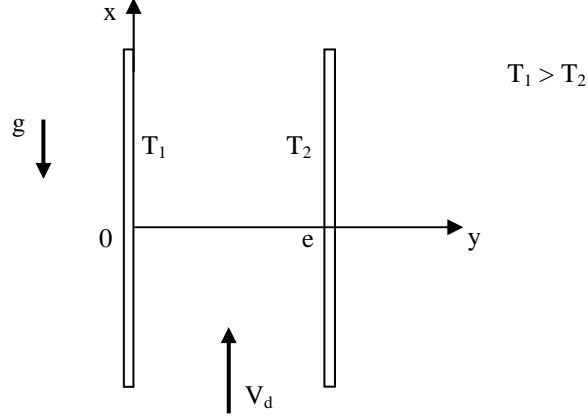
On considère en premier lieu un écoulement convectif laminaire entre deux parois planes verticales parallèles de températures uniformes  $T_1$  et  $T_2$  (fig. 1).

En notant  $T_1 - T_2 = \Delta T$ , le calcul donne [8, 9] :

$$U = \frac{g \beta}{\nu} \left\{ \frac{\Delta T}{6e} y^3 - \frac{T_1 - T_{ref}}{2} y^2 \right\} + \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx} \frac{y^2}{2} + C_1 y \quad (16)$$

$$\text{avec } C_1 = - \frac{g \beta}{\nu} \left\{ \frac{\Delta T}{6} e - \frac{T_1 - T_{ref}}{2} e \right\} - \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dx} \frac{e}{2}$$

$$T = - \frac{\Delta T}{e} y + T_1 \quad (17)$$



**Fig. 1 – Géométrie plane**

D'après (13), la température de référence est ici :

$$T_{ref} = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (18)$$

Alors, le champ de vitesse s'écrit, en distinguant les contributions de la CN et de la CF :

$$U = U_f + U_n \quad (19a)$$

$$U_f = \frac{1}{2\mu} \frac{dp^*}{dx} (y^2 - ey) ; \quad U_n = \frac{g \beta \Delta T}{\nu} \left( \frac{y^3}{6e} - \frac{y^2}{4} + \frac{ey}{12} \right) \quad (19b)$$

On en déduit la vitesse débitante  $V_d$  et le débit total  $q_v$  (dans une section de largeur unité) :

$$V_d = \frac{1}{e} \int_0^e U dy = - \frac{e^2}{12\mu} \frac{dp^*}{dx} ; \quad q_v = V_d e = - \frac{e^3}{12\mu} \frac{dp^*}{dx} \quad (20)$$

Autrement dit, dans le cas présent, la contribution de la poussée thermique au débit est égale à zéro : le complément de débit du côté de la paroi chaude est exactement compensé par un déficit de débit du côté de la paroi froide. D'ailleurs, l'analyse des expressions précédentes montre qu'un écoulement de retour descendant le long de la paroi froide (paroi à température  $T_2 < T_1$ ) prend naissance pour un coefficient de poussée thermique  $RiRe > 288$  [9]. En particulier, en convection naturelle pure, le débit total est nul : le débit montant est égal au débit descendant.

Il est important de revenir ici sur l'importance de la température de référence. Ainsi, dans les cas d'écoulements entre deux parois de températures différentes, certains auteurs choisissent de prendre  $T_{ref} = T_2$ , température de la paroi froide. *Ceci est incorrect*, car la condition d'équilibre (15) n'est plus respectée, avec pour conséquence qu'en CN pure ( $dp^*/dx = 0$ ), le débit total n'est pas nul (le calcul montre que le débit montant est supérieur au débit descendant). Il faut donc être extrêmement prudent en manipulant l'approximation de Boussinesq.

## 2.2. Critère de sélection CF/CM/CN

Compte tenu de (16), (19b) et (20), les termes (a) et (c) de (6) ont pour moyennes quadratiques:

$$\overline{a^2} = \frac{1}{12} g^2 \beta^2 \Delta T^2 \quad ; \quad \overline{c^2} = \frac{1}{12} g^2 \beta^2 \Delta T^2 + 144 \frac{v^2 V_d^2}{e^4} \quad (21)$$

et l'on constate que leur rapport  $P^2$  s'exprime exclusivement en fonction du coefficient de poussée thermique  $RiRe$  (cf. § 1.3) dont l'expression est ici (avec un diamètre hydraulique égal à  $2e$ ):

$$RiRe = \frac{g\beta \Delta T 4e^2}{V_d v} \quad (22)$$

soit :

$$P^2 = \frac{\overline{a^2}}{\overline{c^2}} = \frac{(RiRe)^2}{(RiRe)^2 + 27648} \quad \text{ou encore : } RiRe = \frac{166,28 P}{\sqrt{1 - P^2}} \quad (23)$$

On voit que  $P$  est compris entre 0 et 1 :  $P = 0$  si  $RiRe = 0$  ;  $P \rightarrow 1$  si  $RiRe \rightarrow \infty$ .

Admettons que nous sommes en convection forcée si les forces de flottabilité représentent moins de 5% des forces visqueuses (soit  $P < 0,05$ ) et en convection naturelle si elles en représentent au moins 95% ( $P > 0,95$ ). Ce critère de sélection correspond à :

**$RiRe > 505,9$  pour la convection naturelle**

**$RiRe < 8,3$  pour la convection forcée**

D'autres critères ont aussi été envisagés : ils portent sur la dissipation, l'énergie cinétique associée à  $U_f$  et  $U_n$ , ou encore la comparaison entre (a) et (b) [9, 10]. Ils conduisent à des ordres de grandeur comparables aux précédents.

## 2.3. Continuité de la description CF – CM - CN

Au paragraphe 1.3, nous avons souligné le problème que pose la description adimensionnée d'un écoulement lorsqu'on se rapproche de la convection naturelle pure, puisqu'elle introduit une discontinuité, en imposant le remplacement de  $Re$  et  $Ri$  par  $Gr$  et  $Bo$  (uniquement dans ce cas limite).

Dans le cas présent, la difficulté vient de l'existence d'un écoulement de retour pour  $RiRe > 288$ . Alors, la vitesse débitante n'est plus adaptée, ou du moins ne décrit que l'aspect global de l'écoulement, en ignorant la présence de deux flux de sens contraire. En particulier, elle devient nulle en CN pure.

Un moyen de rétablir la continuité de la description adimensionnée est de considérer seulement l'écoulement montant. Cela ne change rien si  $RiRe < 288$ . Dans le cas contraire, appelons  $y_i$  la position du point d'inversion qui sépare les deux écoulements, telle que  $U(y_i) = 0$ . D'après (16), cette relation est une simple équation du second degré, dont la solution est (en remplaçant le gradient de pression par  $V_d$  - relation 20) :

$$y_i = \frac{e}{2} + 36 \frac{V_d v}{g\beta \Delta T e} \quad \text{ou encore} \quad \frac{y_i}{e} = \frac{1}{2} + \frac{144}{RiRe} \quad (24)$$

Si  $RiRe > 288$ , alors  $y_i < e$ . Ceci permet de calculer le débit montant  $q_{v\uparrow} = \int_0^{y_i} U(y) dy$  et la vitesse débitante correspondante,  $V_{d\uparrow} = q_{v\uparrow} / y_i$ . On peut alors définir les nombres de Reynolds et de Richardson de l'écoulement montant,  $Re_{\uparrow} = \frac{2 y_i V_{d\uparrow}}{v}$  et  $Ri_{\uparrow} = \frac{g \beta \Delta T 2 y_i}{V_{d\uparrow}^2}$ , qui ont en particulier une valeur finie non nulle en CN pure.

### 3. Deuxième exemple : géométrie annulaire, régime permanent

#### 3.1. Champs de température et de vitesse

Nous envisageons maintenant un écoulement entre deux parois cylindriques verticales de rayons  $R_1$ ,  $R_2$  et de températures  $T_1$ ,  $T_2$  (fig. 2). Par rapport à la géométrie plane, cette disposition introduit un élément de dissymétrie puisque les deux parois n'ont pas la même surface.

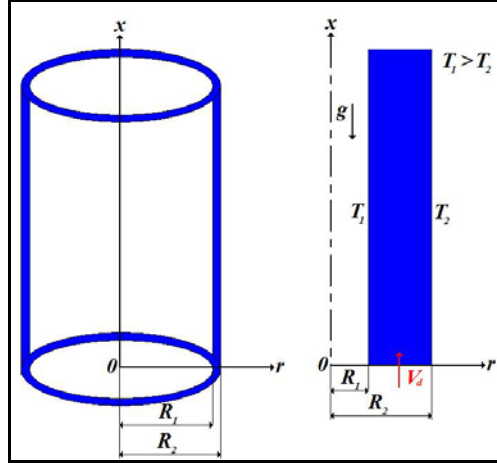


Fig. 2 - Géométrie cylindrique

Les équations du problème s'écrivent ici :

$$0 = g \beta (T - T_{ref}) - \frac{1}{\rho} \frac{dp^*}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

Le champ de température est toujours purement conductif. Son expression est :

$$T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_1} \quad (26)$$

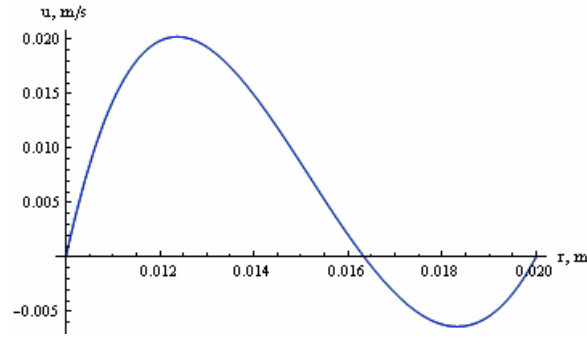
D'après (13), la température de référence est maintenant :

$$T_{ref} = \frac{2 \int_{R_1}^{R_2} T(r) r dr}{R_2^2 - R_1^2} \quad (27)$$

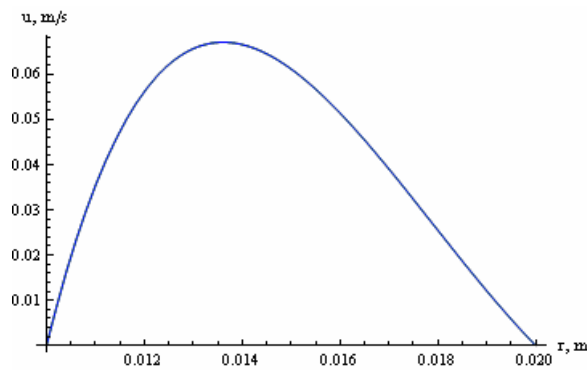
En remplaçant alors  $T$  et  $T_{ref}$  dans la première équation (25) on obtient après intégration le champ de vitesse  $U(r)$ . Celui-ci est encore de la forme  $U = U_f + U_n$ , où  $U_f$  contient les termes en  $dp^*/dx$ , et  $U_n$  les termes en  $g\beta$  (cf. relations 19). On trouvera leurs expressions complètes dans [3]. Leur examen montre que, comme en géométrie plane, lorsque  $RiRe$  est supérieur à une valeur critique (qui dépend ici de  $R_2/R_1$ ), il existe un écoulement de retour le long de la paroi froide, caractérisé par  $U < 0$  (fig. 3 et 4).

A partir du champ de vitesse on obtient alors la vitesse débitante et le débit volumique :

$$V_d = \frac{2\pi \int_{R_1}^{R_2} U(r) r dr}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} ; \quad q_v = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} U(r) r dr \quad (28)$$



**Fig. 3** – Profil de vitesse à poussée thermique élevée  
 $R_1 = 0,01 \text{ m}$  ;  $R_2 = 0,02 \text{ m}$  ;  $T_1 = 24 \text{ }^\circ\text{C}$  ;  $T_2 = 16 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $V_d = 0,5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $Re = 100$  ;  $RiRe = 1292$



**Fig. 4** – Profil de vitesse à faible poussée thermique  
 $R_1 = 0,01 \text{ m}$  ;  $R_2 = 0,02 \text{ m}$  ;  $T_1 = 24 \text{ }^\circ\text{C}$  ;  $T_2 = 16 \text{ }^\circ\text{C}$   
 $V_d = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $Re = 800$  ;  $RiRe = 161,5$

### 3.2. Critère de sélection CF/CM/CN

Reprenons la méthode proposée pour attribuer des « limites » à la CN et à la CF, en comparant les moyennes quadratiques des termes (a) et (c) (équation 6), soit :

$$P^2 = \overline{a^2} / \overline{c^2} \quad (29)$$

Ce rapport  $P$  peut être exprimé analytiquement à partir des relations (4) et (5), puis mis sous forme adimensionnelle. Il se présente alors comme une fonction du coefficient de poussée thermique  $RiRe$  et du rapport des rayons  $R_2/R_1$ .

Nous pouvons encore admettre, comme cela a été proposé en géométrie plane, que l'on est en convection forcée si les forces de flottabilité représentent moins de 5% des forces de viscosité ( $P < 0,05$ ) et en convection naturelle si elles en représentent plus de 95% ( $P > 0,95$ ). On obtient alors les valeurs suivantes, pour un rapport des rayons égal à 3 :

**Convection forcée** :  $P < 0,05 \Rightarrow RiRe < 9$

**Convection naturelle** :  $P > 0,95 \Rightarrow RiRe > 383$

### 3.3. Retour sur la température de référence

Une conséquence inattendue de la température de référence retenue pour le calcul est que, lorsque le gradient de pression est égal à zéro (CN pure), la vitesse débitante n'est pas nulle : le débit montant le long de la paroi chaude (intérieure) est supérieur au débit descendant le long de la paroi froide (extérieure). Si l'on considère que gradient de pression nul et débit nul vont de pair (aucune



raison physique ne semble cependant le justifier), il faut recourir à une autre température de référence (qui peut être calculée numériquement), mais celle-ci ne satisfait plus au critère énoncé en (12b) [3]. Enfin, la simple moyenne arithmétique de  $T_1$  et  $T_2$ , parfois utilisée, ne concorde pas non plus avec (12b).

*Il est très important de noter ici que, en géométrie plane, les trois températures moyennes que nous venons de citer coïncident, car elles sont toutes trois égales à  $(T_1 + T_2)/2$ . La géométrie annulaire présente donc le grand avantage d'être discriminante vis-à-vis de ces diverses définitions.*

#### 4. – Troisième exemple : géométrie plane ; régime transitoire

Nous revenons maintenant à la géométrie plane (fig.1), mais cette fois en régime transitoire [11]. A partir d'un état stationnaire caractérisé par les températures de parois  $T_1$  et  $T_2$ , on applique à l'instant  $t = 0$  sur la paroi  $y = 0$  un échelon de température  $\Delta T > 0$ , soit :  $T_1 \rightarrow T_1 + \Delta T$  ;  $T_2 = cte$ . Les équations du problème sont alors, en négligeant les variations de  $\rho$  dans l'équation d'énergie :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g \beta (T - T_{ref}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (30a)$$

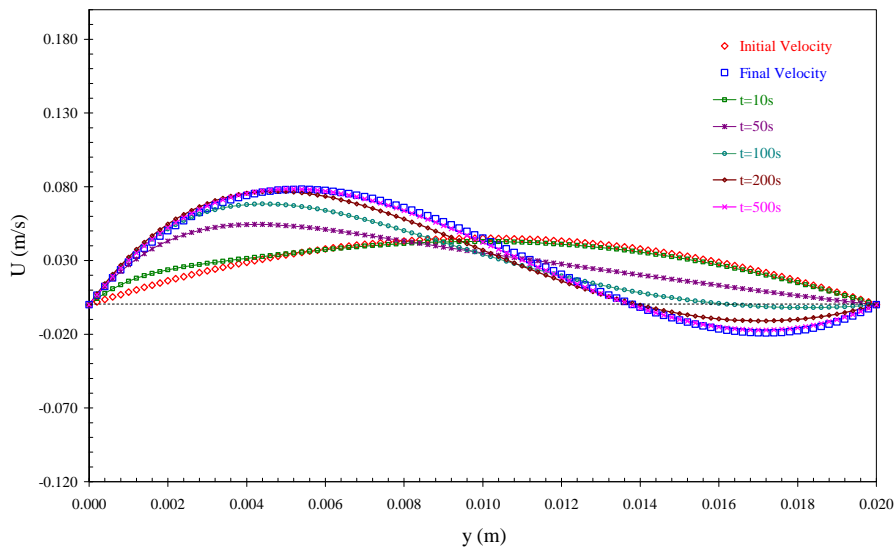
$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (30b)$$

A nouveau, le champ de température est découplé du champ de vitesse ; il est purement diffusif, et sa solution est classique.

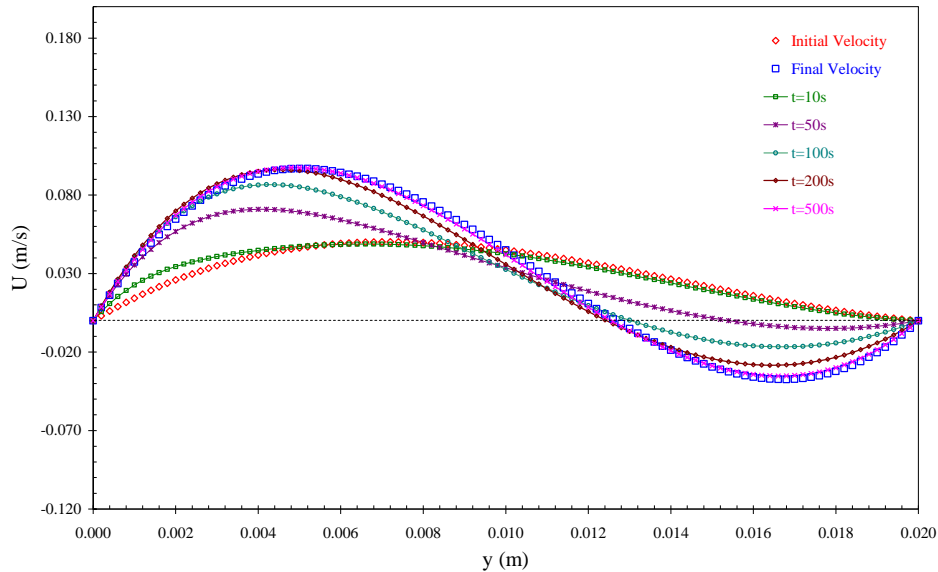
En ce qui concerne la température de référence, notons que le raisonnement du § 1.4., qui conduit à l'expression (13), peut être étendu au régime variable. Dans ce cas,  $T_{ref}$  devient une fonction du temps [11]:

$$T_{ref}(t) = \frac{1}{S} \int_S T(x,t) dS \quad (31)$$

Deux exemples de champs de vitesse sont donnés ci-dessous (régime initial isotherme, fig. 5 ; régime initial non isotherme, fig. 6), pour un écoulement d'eau à température ambiante, avec :  $e = 2.10^{-2} m$  et  $dp^*/dx = -0,898 Pa/m$ . On vérifie que le champ de vitesse final est bien identique à celui qui a été calculé directement en régime permanent.



**Fig. 5 – Profils de vitesse à différents instants.**  
 $RiRe_{initial} = 0$  ;  $RiRe_{final} = 754,46$  ( $\Delta T = 7^\circ C$ )



**Fig. 6 – Profils de vitesse à différents instants.**  
 $RiRe_{initial} = 215,56$  ( $\Delta T_{initial} = 2^{\circ}C$ ) ;  $RiRe_{final} = 1077,8$  ( $\Delta T_{final} = 10^{\circ}C$ )

Indiquons pour conclure que la méthode de sélection développée aux § 2.2 et 3.2 s'étend au régime transitoire, et offre de plus la possibilité de définir un coefficient de poussée thermique  $RiRe(t)$  fonction du temps [11].

## Références

- [1] R. Cotta, J. Padet – *Transient fully developed internal mixed convection with Boussinesq approximation*. Congrès ENCIT 2008, Belo Horizonte, Bresil (2008)
- [2] C. Padet, E.C. Mladin, J. Padet, A. Dobrovicescu – *Dissipation visqueuse et production d'entropie dans un écoulement établi de convection mixte*. Congrès COFRET – 08, ISBN 2.6905267.61.5, Nantes (2008)
- [3] J. Padet, R.M. Cotta, C. Chereches, V. Pavel – *Convection mixte laminaire établie dans une conduite annulaire*. Congrès COFRET-08, ISBN 2.6905267.61.5, Nantes, France (2008)
- [4] A. Barletta, E. Zanchini, – On the choice of the reference temperature for fully developed mixed convection in a vertical channel. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 42, pp. 3169-3181 (1998)
- [5] Q. Wang, H. Yoo, Y. Jaluria – Convection in a horizontal rectangular duct under constant and variable property formulations. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 46, p.297-310 (2003)
- [6] J. Padet – *Fluides en écoulement ; méthodes et modèles*. Seconde édition publiée par la Société Française de Thermique. En libre accès sur le site [www.sft.asso.fr](http://www.sft.asso.fr). (2009)
- [7] Y. Bayazitoglu, P.R. Paslay, P. Cernocky – Laminar Bingham fluid flow between vertical parallel plates. *Int. J. Thermal Sci.*, 46, p.349-357 (2007)
- [8] W. Aung, G. Worku, – Theory of fully developed combined convection including flow reversal. *J. Heat Transfer*, 108, p.485-488 (1986)
- [9] J. Padet, R.M. Cotta, N.C. Chereches, N. El Wakil – *Internal mixed convection: Criteria for transition from natural to forced convection*. Conf. ENCIT 2004, Rio de Janeiro, Brazil, Ref CIT04-0841, 10p. (2004)
- [10] C. Padet, E-C. Mladin, J. Padet, A. Dobrovicescu – *Minimization of entropy production in fully developed mixed thermal convection*. Int. ICHMT Symp. on Convective Heat and Mass Transfer CONV 09, comm. N° 69, Hammamet, Tunisie (2009)
- [11] M. Ezan, J. Padet, N. El Wakil, R.M. Cotta – *Some investigations on transient mixed convection*. Congrès ICHMT "Computational Heat Transfer" CHT-08, Ref. CHT-08-218, Marrakech, Maroc (2008)